

DIE FLIESS'SCHE PERIODENLEHRE

IM LICHTE BIOLOGISCHER
UND MATHEMATISCHER KRITIK

EIN BEITRAG ZUR GESCHICHTE DER
ZAHLENMYSTIK IM XX. JAHRHUNDERT

VON

J. AEBLY

DR. MED. / ARZT IN ZÜRICH



HIPPOKRATES-VERLAG / STUTTGART
LEIPZIG-ZÜRICH / 1928

J. AEBLY

DIE FLIESSSCHE PERIODENLEHRE
IM LICHTE BIOLOGISCHER UND MATHEMATISCHER
KRITIK

J. AEBLY

DIE FLIESS'SCHE
PERIODENLEHRE

IM LICHTE BIOLOGISCHER UND
MATHEMATISCHER KRITIK

EIN BEITRAG ZUR GESCHICHTE DER
ZAHLENMYSTIK IM XX. JAHRHUNDERT



HIPPOKRATES-VERLAG
STUTTGART - LEIPZIG - ZÜRICH 1928

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitung	7
I. Ein anderes Zahlenpaar	15
II. Statistik	33
III. Das Jahr	40
IV. Vom Zusammenhang der Generationen und der Familiensubstanz	46
V. Verteilung der Ereignisse	49
VI. Zur Theorie der Aequivalenz	55
VII. Analyse der Einwände	63
VIII. Schlußbetrachtung und psychologische Würdigung des Falles	66
IX. Mathematischer Anhang	76
1. Der Modul	76
2. Die Kongruenz	78
3. Fehlertheoretische Betrachtungen	83
4. Einige Bemerkungen über Kettenbrüche	88
X. Literaturverzeichnis	92

NA 03



2006.51
(6 6227)

EINLEITUNG

Im Jahre 1906 erschien im Verlag von Franz Deuticke, Leipzig und Wien, ein beinahe sechshundert Seiten starker Band: „Der Ablauf des Lebens. Grundlegung zur exakten Biologie“, von Wilhelm Fließ, einem Berliner Arzte. Das Buch fand nicht den Anklang, den der Autor für seine wichtige Entdeckung glaubte erwarten zu dürfen. Die Kritik verhielt sich ablehnend und, was noch mehr ins Gewicht fiel, es wollte niemand die neuen Ideen aufnehmen. Am schnellsten waren die Mathematiker mit ihrem Urteil fertig, das einer völligen Ablehnung der Fließ'schen Ideen gleichkam. Die Biologen lehnten nicht so ausdrücklich ab, da sie sich in dem großen Haufen von Formeln nicht zurecht fanden. Aber sie benutzten die Theorie von Fließ nicht. Speziell die Mediziner, für die das Buch in allererster Linie in Betracht gekommen wäre, nahmen die neue Lehre nicht auf, denn sie war viel zu mathematisch. Einer Widerlegung von dieser Seite beugte Fließ durch die Behauptung vor, daß seine Lehre durch keine Hypothesen gestützt werde, sondern „nur mit den Mitteln der exaktesten mathematischen Analyse“ arbeite. Der gewaltige Aufwand von Formeln und Rechnerei, der das Buch charakterisiert, schien für den Uneingeweihten diese Behauptung zu bestätigen. Auf alle Fälle genügte der Appell an die schwächste Seite der meisten Mediziner, die Mathematik, um die damit verbundenen Minderwertigkeitsgefühle so anzuregen, daß sie sich gar nicht mit der Sache befaßten.

Im Gegensatz zur Haltung der offiziellen Wissenschaft fand Fließ bei einigen Outsidern Anklang. Unter diesen befand sich merkwürdigerweise auch ein Mathematiker, welcher Umstand wiederum nicht wenig dazu beitrug, Biologen und Mediziner von einem kritischen Studium abzuhalten. Dem Biologen mußte es allerdings merkwürdig erscheinen, daß ein Mathematiker, der in biologischen Dingen über kein eigenes, auf eigene Arbeit auf diesem Gebiete gegründetes Urteil verfügte, sich als Gutachter aufspielte. Aber die Scheu vor der Mathematik verhinderte, daß die Auslassungen dieses Nicht-Biologen kritisch auf ihren Gehalt geprüft wurden.

Dazu kam noch ein weiteres Moment: Fließ zeigte in den Anwendungen seiner Theorie eine geradezu staunenswerte Vielseitigkeit: Medizin, Mathematik, Botanik, Zoologie, Vererbungslehre, Astronomie, Statistik, Psychologie wurden herangezogen, und überall gezeigt, daß die Lehre passe und all das Vorhergefundene glänzend bestätige. Einer solchen Vielseitigkeit gegenüber kam sich der einzelne als Vertreter eines Faches geradezu hilflos vor, und wenn ihm auch sein wissenschaftlicher Instinkt sagen mußte, daß da etwas nicht richtig sein könne, so hatte er doch nicht die Mittel, die Theorie bündig zu widerlegen.

Im Grunde genommen steckt aber hinter dieser scheinbaren Vielseitigkeit sehr wenig. Fließ hat sich begnügt, aus den verschiedensten Gebieten der Biologie Zahlen herauszusuchen und sie zu verarbeiten. Irgend eine Materialkritik übte er nicht, sondern nahm die Zahlen, wie er sie gerade fand. Das wird sich im Kapitel Statistik klar erweisen.

Im Jahre 1923 erschien die zweite, neubearbeitete Auflage. Sie ist gegenüber der ersten an Umfang zurückgegangen (ca. 400 Seiten), was durch gewisse „Vereinfachungen“ in der Darstellung erzielt werden konnte. Im übrigen aber hat Fließ seinen Standpunkt nicht geändert und betont ausdrücklich, daß er „nichts zurückzunehmen“ habe, was allerdings, beiläufig bemerkt, nicht ganz stimmt.

Aber die Nichtanerkennung hat den unentwegten Autor nicht zum Verzagen gebracht, sondern im Gegenteil sein Selbstbewußtsein noch erhöht: er stellt sich ganz resolut an die Seite Keplers und bestimmt damit seine Stellung in der Geschichte der Wissenschaft.

Man muß sich natürlich fragen, ob es überhaupt einen Sinn hat, eine Lehre wie die von Fließ durch logische Argumente zu widerlegen. Daß der Autor dazu gebracht werde, seine Ansicht aufzugeben, scheint mir aus psychologischen Gründen ausgeschlossen. Wer sich gegen dreißig Jahre mit einer Theorie beschäftigt hat und sie als so wichtig ansieht, daß er fest glaubt, in der Geschichte der Wissenschaft einen Platz neben Kepler einzunehmen, ist über das Stadium der sachlichen Diskussion hinaus, ganz abgesehen davon, daß schon die Lektüre der ersten Auflage jedem psychiatrisch etwas Gebildeten die Überzeugung aufdrängte, daß es sich bei Fließ um eine überwertige Idee handle. Man versteht darunter nach Wernicke Ideen, die sich immer auf- und vordrängen, meist Erinnerungen an ein affektvolles Erlebnis, die aber, im Gegensatz zu den Zwangsideen, nicht als unrichtig empfunden werden. Sie sind

vollständig mit der Person verwachsen und unterscheiden sich von gewöhnlichen gefühlsbetonten Ideen nur dadurch, daß der von ihnen Befallene sie auf die Dauer nicht los wird, und daß sie Neigung haben, sich neue Erlebnisse zu assoziieren. Diese überwertigen Ideen treten bei sonst gesunden Personen auf; sie sind das einzige Symptom einer geistigen Störung, die sich auf die Urteilsfähigkeit in dem von der überwertigen Idee beherrschten Gebiet beschränkt.

Da die gleiche Störung der Urteilsfunktion sich bei den überzeugten Anhängern von Fließ zeigt, wird es auch nicht möglich sein, sie zu belehren. Es kann sich also nur darum handeln, kritisch gesinnte Leute, die an und für sich der Lehre zugetan wären, von deren Unhaltbarkeit zu überzeugen. Dann habe ich auch alle die im Auge, die die Fließ'sche Lehre instinktiv ablehnen, ohne dafür positive Gründe angeben zu können und die sich bis jetzt dem Vorwurf von Fließ ausgesetzt sahen, daß sie die Lehre aus affektiven Gründen ablehnen, weil sie die Fundamente der Biologie erschüttere.

Dazu kommt noch, daß in den letzten Jahren diese Irrlehre von Leuten, die meist weder genügende biologische noch mathematische Kenntnisse haben, in einzelnen Gebieten angewandt wurde und scheinbar wertvolle Aufklärungen gab, die indes einer Kritik ebenso wenig standhalten wie die Beispiele von Fließ.

Da also die Möglichkeit besteht, daß sich diese Lehre wenn auch langsam, doch weitverbreite, schien mir eine gründliche Widerlegung nötig, und ich habe mich der Aufgabe, wenn auch nur sehr ungerne, unterzogen.

Die einzelnen Kapitel des Buches hängen untereinander nur lose zusammen. Jedes betrachtet den Gegenstand entweder von einer andern Seite oder ein bestimmtes Gebiet, auf das Fließ seine Theorie angewandt hat.

Es konnte sich natürlich nicht darum handeln, alle möglichen Einwände gegen die Theorie von Fließ zusammenzustellen. Ich habe mich damit begnügt, die m. E. wichtigsten etwas ausführlicher darzustellen.

Wenn der Mathematiker R. Pfennig am Schlusse seiner Broschüre behauptet: „Und hinter dem mathematischen Formalismus erheben sich die biologischen Probleme“ (S. 122), so wird der Biologe gegen eine solche kühne Behauptung, soweit sie sich auf die Fließ'sche Periodenlehre stützt, ganz energisch protestieren.

Es wäre nicht gerade leicht, den Inhalt des Buches von Fließ in einigen Sätzen kurz darzulegen. Denn die ursprüngliche Idee, daß sich das Leben in periodischem Rhythmus von 23 und 28 Tagen abspiele, konnte in dieser einfachen Gestalt nicht durchgeführt werden. Es mußten komplizierte Ausdrücke zu Hilfe genommen werden, deren „Berechtigung“ sich nur durch eine gewisse Symmetrie ergab. Um so wichtiger scheint es, den Ausführungen von Fließ da nachzugehen, wo die einfachen Perioden von 23 und 28 Tagen eingeführt werden.

Zu diesem Zweck wollen wir das erste Beispiel, das in beiden Auflagen den Reigen eröffnet, einer kritischen Analyse unterziehen. Es handelt sich um eine Reihe von Menstruationsdaten von Fr. H. Warum Fließ gerade dieses Beispiel wählte, ist nicht recht klar. Denn wie er selbst hervorhebt, kommt das „typische“ Intervall von 28 Tagen überhaupt nicht vor; dagegen einmal das Intervall von 23 Tagen. Fließ wendet daher ein Mittel an, das er nachher immer wieder braucht, wenn die Gesetzmäßigkeit nicht evident ist, nämlich das „Ordnen“ der gegebenen Daten. D. h. er nimmt die Ereignisse nicht in der Reihenfolge, wie sie sich abspielten, sondern faßt sie in mehr oder weniger willkürlicher Weise zusammen.

Er ist sich offenbar dessen gar nicht bewußt, daß in dieser Manipulation schon gewisse Voraussetzungen – Hypothesen – stecken, ganz im Widerspruch zu der kühnen Behauptung am Anfang des Buches, daß alles ohne Hypothesen abgehe. Aber es geht unserem Autor wie so vielen andern naiven Theoretikern, die glauben, man komme ohne Hypothesen aus, wenn man sie nicht ausdrücklich formuliert. Daß schon die Art und Weise des Vorgehens ganz bestimmte Voraussetzungen involviert, die man bei richtiger methodisch-kritischer Betrachtung nachweisen kann, scheinen weder Fließ noch seine Anhänger zu wissen.

Suchen wir vorerst einmal, uns die Rolle klar zu machen, die der reine Zufall spielen kann! Nehmen wir an, wir hätten die Zahlen, von 1 bis n zu unserer Verfügung, wobei n eine größere Zahl sein soll. Aus diesem Zahlbereich greifen wir „zufällig“ eine Zahl heraus und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, daß sie entweder durch 23 oder 28 teilbar, d. h. ein Vielfaches einer der beiden Perioden sei. Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$w = 1/23 + 1/28 - 1/23 \cdot 28 = 0,08.$$

D. h. man wird bei häufiger Wiederholung des Versuches etwa einmal auf 12 Versuche einen Erfolg haben.

In dem Beispiel von Fr. H. finden wir unter 10 Zahlen (Intervallen) einmal die Zahl 23. Wenn wir also unsere Zahlen rein zufällig aus einem gewissen Bereich herausgegriffen hätten, so hätten wir ungefähr dieses Resultat erwarten dürfen.

Nun können wir aber aus den 11 Daten, die in der natürlichen Reihenfolge genommen 10 Intervalle – eben die von Fließ zuerst gebrachten beobachteten Menstruationsintervalle – bilden, durch freie Kombination zu je zweien $11 \cdot 10 : 2 = 55$ Intervalle bilden. Unter diesen 55 werden wir dann nicht mehr nur ein Vielfaches von 23 oder 28 finden, sondern 4–5, unter Umständen natürlich auch einige mehr oder weniger, da es sich bei dieser Berechnung nur um Durchschnittswerte (mathematische Erwartungen) handelt.

Auf diese Erhöhung der Chancen läuft die Fließ'sche Umordnung seiner Zahlen hinaus; nur daß Fließ das natürlich nicht merkt und demnach wohl auch nicht zugeben wird. Für ihn gehören Daten zusammen, die durch ein Intervall von einem Vielfachen von 23 oder 28 Tagen getrennt sind. Gerade darin liegt aber der schönste logische Zirkel: Fließ schließt aus dem Bestehen eines Intervalles von der erwähnten Beschaffenheit auf die Zusammengehörigkeit der beiden Ereignisse, die er aus dieser Tatsache aber nicht ableiten kann, da er ja das, was er beweisen will, als Beweisgrund nimmt.

Nun findet Fließ unter den umgeordneten Zahlen 2 reine Intervalle von 23 Tagen und eines von 28 Tagen, im ganzen also 3 durch 23 resp. 28 teilbare Zahlen; d. h. nicht einmal das, was der reine Zufall bei der erwähnten Umordnung zustandebringen könnte. Dabei wäre allerdings noch zu berücksichtigen, daß von den gefundenen Intervallen nicht alle zulässig sein könnten, wodurch sich die Zahl der zu erwartenden Erfolge verringern müßte. Aber Fließ findet noch 5 Intervalle, die von reinen Intervallen nur um ± 1 Tag abweichen, und zählt diese ohne weitere Skrupel dazu mit einer Begründung, die eine bemerkenswerte Unwissenheit elementarmathematischer Dinge verrät. Es handelt sich da um die bekannte Tatsache, daß bei der Summenbildung die Abweichungen der einzelnen Summanden von ihrem arithmetischen Mittel verschwinden, woraus aber noch lange nicht das geschlossen werden kann, was Fließ behauptet.

Es zeigt sich aber schon hier ein Merkmal der Arbeitsweise von Fließ mit aller Deutlichkeit, das sich in den verschiedensten Abarten durch das ganze Buch hindurchzieht: das fortwährende Umgehen der Schwierigkeiten durch neue, nicht formulierte Hypothesen.

sen, die durch die Worte „offenbar“, „natürlich“, „selbstverständlich“, „ohne Zweifel“ usw. verdeckt werden.

Ja, wenn nur alle Annahmen, die Fließ im Laufe seiner Berechnungen macht, so natürlich und selbstverständlich wären, wie er glaubt! Wer aber nicht von vornherein von der Richtigkeit der Fließ'schen Theorie überzeugt ist, wird schon von Anfang an die schwersten Bedenken haben, und diese Bedenken werden sich im Laufe der Lektüre nicht nur nicht zerstreuen, sondern im Gegenteil noch verstärken.

Aber nicht nur vom rein mathematischen Standpunkt aus, sondern auch vom medizinischen, resp. biologischen aus ist das Vorgehen von Fließ sehr zu beanstanden. Nach allem, was wir heute, resp. schon seit einer ganzen Reihe von Jahren über die Menstruation wissen, geht es nicht mehr an, der Menstruation an sich, resp. dem genauen zeitlichen Eintritt derselben einen größeren Wert beizulegen. Die Menstruation ist nur ein Epiphänomen, hinter dem sich der wesentliche Vorgang, nämlich die Ovulation verbirgt. Die beiden stehen aber nicht in so fester zeitlicher Bindung, daß man aus dem Eintritt des einen Vorganges auf die Zeit des Eintrittes des andern schließen könnte. Insbesondere ist der Eintritt der Menstruation von einer ganzen Menge von Umständen abhängig, die ihn eventuell nicht unbedeutend verschieben können. Es weiß heute jeder Arzt, welch großen Einfluß namentlich psychische Vorgänge auf die Menstruation haben. Das Bild, das uns die Mensesdaten von Frä. H. liefern, macht in der Tat auf den unbefangenen Beobachter durchaus den Eindruck einer Reihe von regellosen Intervallen. Daß es dann Fließ durch Umordnung der Daten gelingt, eine Art von „Gesetzmäßigkeit“ nachzuweisen, wird niemand merkwürdig finden, der die vorhergehenden Ausführungen verstanden hat.

Auch in der Berechnung der Dauer einer bestimmten Schwangerschaft ist Fließ ziemlich kritiklos, wenn er das Intervall vom Beginn der letzten Regel bis zur Geburt als wirkliche Dauer der Schwangerschaft rechnet (I, S. 27 und S. 77). Demgegenüber muß nachdrücklich betont werden, daß wir die Dauer einer Schwangerschaft nicht feststellen können.

Daß Fließ in seinem großen Material auch eine Reihe von guten Beispielen bringen kann, wird niemand wundern, der einige Erfahrung auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat. So ist das (I, S. 11, II, S. 11) gegebene Beispiel einer Clivia mit lauter reinen Intervallen von 23 und 28 Tagen in der Tat interessant.

Aber es steht in einer solchen „splendid isolation“, daß ein kritischer Beurteiler aus ihm allein mit dem besten Willen nicht „Bände“ entnehmen kann, wie Fließ in seinem Enthusiasmus meint. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Zusammentreffens von reinen Intervallen von 23 und 28 Tagen ist zwar jedenfalls sehr klein, vielleicht aber nicht einmal so klein, wie man von vornherein denken könnte. Wir haben allerdings gar keine Möglichkeit, sie zu berechnen, da wir über den Zahlbereich, aus dem die Zahlen 23 und 28 gewählt werden müßten – die Zahl der möglichen Fälle in der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgedrückt – gar nichts wissen.

Wir brauchen uns aber nicht so intensiv mit diesem Beispiel zu beschäftigen, denn es kommt ihm keine so wichtige Rolle zu, wie Fließ glaubt. Sie käme ihm erst dann zu, wenn die voreiligen Verallgemeinerungen, die Fließ aufgestellt hat, zu Recht bestünden, was, wie ich zu zeigen glaube, nicht der Fall ist. An sich könnte das Beispiel im besten Falle zeigen, daß in der Tat 23 und 28 Tage eventuell eine gewisse Rolle im biologischen Geschehen spielen, und es bliebe diese Rolle zu erforschen übrig.

Es hat daher auch keinen Sinn, sich hier lange mit den einzelnen Beispielen zu beschäftigen. Wir werden im Laufe unserer Betrachtungen eine ganze Reihe von Beispielen zu analysieren haben und zwar von verschiedenen Gesichtspunkten aus. Der Leser möge sich also etwas gedulden und nicht glauben, daß ich mir die Kritik möglichst leicht machen wolle.

Wer ohne längere theoretische Überlegungen sich davon überzeugen will, daß die Zahlen 23 und 28 nicht die Ausnahmestelle spielen, die Fließ ihnen zuschreibt, braucht nur das 1. Kapitel: „Ein anderes Zahlenpaar“ zu lesen. Er wird dann finden, daß dort etliches ohne Schwierigkeiten geleistet worden ist, was Fließ als unmöglich erklärte.

I. EIN ANDERES ZAHLENPAAR

Der Haupteinwand der Gegner von Fließ ging dahin, daß sich seine Resultate auch mit andern Zahlenpaaren erreichen lassen, ja sogar mit beliebigen teilerfremden Zahlen. Ein Gegner hat sogar übersehen, daß die Teilerfremdheit eine unumgängliche Bedingung für die Darstellbarkeit einer beliebigen Zahl durch 23 und 28 ist.

Diese Behauptungen gehen entschieden zu weit, und Fließ konnte triumphierend darauf hinweisen, daß seine Gegner, die behaupteten, man könne Beispiele nur so aus dem Ärmel schütteln, nicht ein einziges aus dem Ärmel schütteln konnten. Daraus darf man jedenfalls schließen, daß es nicht so einfach ist, die Fließ'schen Resultate mit andern Zahlenpaaren zu erhalten, und daß die Kritiker sich keine große Mühe gegeben haben, falls eine Darstellung durch ein anderes Zahlenpaar möglich ist.

Fließ schließt allerdings anders und sieht in den mißglückten Versuchen den Beweis für die Richtigkeit seiner Behauptung, daß eine Darstellung durch andere Zahlen als 23 und 28 überhaupt unmöglich sei.

Das Problem besteht darin, bestimmte, gegebene Zahlen durch ein Zahlenpaar, sagen wir a und b , sowie Verbindungen aus diesen beiden Zahlen bis zu Polynomen 2. und 3. Ordnung darzustellen.

Fließ verlangt aber noch mehr, und mit ihm seine Anhänger Pfennig, Schlieper u. a.; nämlich daß man mit den andern Zahlen die ursprünglichen Zahlen in genau derselben Weise darstelle, d. h. daß sich alle die „Beziehungen“ ergeben, die Fließ gefunden hat. Ja, an einzelnen Stellen verlangt Fließ geradezu, daß die Ausdrücke, die er gefunden, ihren Wert behalten müssen, wenn man statt „seiner“ Zahlen die andern einsetzt.

Das haben die Kritiker übersehen und geglaubt, die ganze Theorie schon durch den von Fließ selbst erwähnten Hinweis erledigt zu haben, daß sich jede Zahl durch 23 und 28 darstellen lasse. Was den von Fließ verlangten Nachweis betrifft, so möchte ich sehr bezweifeln, daß er mit einem andern Zahlenpaar vollständig durchgeführt werden kann. Wenn damit schon die Richtigkeit der Thesen von

Fließ erwiesen wäre, brauchte man weiter gar keine Mühe auf das Suchen eines andern Zahlenpaares zu verwenden. Aber dem ist nicht so. Fließ hat sich die Aufgabe zu leicht und seinen Kritikern zu schwer gemacht, indem er diese Forderungen stellte.

Woher nimmt er überhaupt das Recht, eine so weitgehende Forderung zu stellen? Woher weiß er denn, daß er mit seinen Formeln natürliche oder sogar naturgesetzliche Beziehungen aufgedeckt hat und nicht einfach das Opfer seiner Zahlenspielerei geworden ist?

Diese Frage finden wir nirgends beantwortet. Alles was zugunsten der Fließ'schen Ansicht spricht, ist eine gewisse Symmetrie in vielen Formeln, eine gewisse Architektonik, „aber das ist denn auch alles“. Der kritische Leser wird diesen Resultaten gegenüber dieselbe Frage stellen, wie der naive Bürger, der von der ganzen Recherei nichts versteht: „Und nun?“

Die Resultate, die Fließ erreicht, sind nämlich gar nichts Besonderes, sofern man sie nicht als Unica betrachtet, weil sie mit andern Zahlen nicht in genau derselben Weise dargestellt werden können.

Ich habe in dem Kapitel über Statistik auf die absolut unzureichende Fundamentierung der Fließ'schen Schlüsse hingewiesen, womit eigentlich für jeden etwas kritisch eingestellten Leser die Sache entschieden sein sollte. Da aber zu befürchten ist, daß von Fließ und seinen Anhängern all das, was nicht ausdrücklich widerlegt worden ist, als feststehend und bewiesen angesehen wird, muß ich etwas näher auf das Problem eingehen und zeigen, daß wirklich ein großer Teil der Fließ'schen Forderungen mit einem andern Zahlenpaar erfüllt werden kann. Zugleich wird sich dann auch zeigen, daß die Fließ'sche Forderung in der Tat zu weitgehend ist.

An und für sich ließe sich wahrscheinlich mit einer ganzen Reihe von teilerfremden Zahlenpaaren ein „System“ aufstellen, das Ähnliches leistet, wie das von Fließ. Damit würde man sich aber die Arbeit ganz unnötig schwer und dem Gegenkritiker Fließ die Kritik leicht machen. Man wird also nicht, wie das die mathematischen Kritiker von Fließ getan haben, irgend ein beliebiges Zahlenpaar aussuchen und damit sein Glück versuchen, sondern ein Zahlenpaar, das gewisse Eigenschaften hat, die im Hinblick auf die Aufgabe vorteilhaft sind. Dazu gehört vor allem eine gewisse Kleinheit der Zahlen. Denn je kleiner die beiden Zahlen sind, um so größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß irgend eine Zahl durch eine der beiden oder durch beide teilbar sei. Wir greifen dem Zufall etwas unter die Arme! Zweitens sollen die Zahlen in einer gewissen mathe-

matischen Verwandtschaft zu 23 und 28 stehen, so daß sich 23 und 28 leicht durch sie ausdrücken lassen. Die Beziehung darf aber nicht zu einfach sein, sonst würde Fließ behaupten, man habe „seine“ Zahlen genommen und seine These nicht nur nicht widerlegt, sondern sogar glänzend bestätigt. So fallen denn die Zahlen 9 und 14 als halbe Perioden, ebenso 7 und 17 weg.

Dagegen werden diese Forderungen erfüllt durch die beiden Zahlen 3 und 5. Es lassen sich nämlich 23 und 28 leicht durch 3 und 5 darstellen:

$$23 = 4.5 + 3$$

$$28 = 5.5 + 3$$

Ferner hat man für die halben Perioden

$$14 = 1.5 + 3.3$$

$$9 = 0.5 + 3.3$$

Ebenso für die häufig vorkommenden Werte 7 und 17

$$7 = 2.5 - 1.3$$

$$17 = 4.5 - 1.3$$

Die Analogie von 3 und 5 mit 23 und 28 geht übrigens noch weiter. 3 und 5 sind zwar nicht kongruent modulo 5* wie 23 und 28, aber sie stammen aus dem Restsystem des Moduls 5.

Es geben nämlich sämtliche ganzen Zahlen durch 5 dividiert einen der Reste 0, 1, 2, 3, 4 und man kann alle ganzen Zahlen in diesen Restklassen unterbringen. 23 und 28 gehören beide derselben Restklasse, nämlich 3 an, während 5 der Restklasse 0, 3 der Restklasse 3 angehört, also derselben wie 23 und 28.

Nun können wir leicht jede durch 23 und 28 dargestellte Zahl durch 3 und 5 darstellen. Es ist nämlich

$$a.23 + b.28 = (4a + 5b)5 + (a + b)3$$

Daneben gibt es selbstverständlich noch andere Darstellungen, die im konkreten Fall besser passen können.

Die Fließ'sche Methode der Aequivalenzbeziehung erlaubt uns aber sogar den Nachweis, daß $23 \equiv 28 \pmod{5}$ sein muß, wenn $3 \equiv 5 \pmod{5}$ ist. Mit andern Worten, das, was Fließ als eine fundamentale Beziehung hinstellt, erscheint als Folge der von uns angenommenen Aequivalenz von 3 und 5, woraus wir mit Recht folgern, daß 3 und 5 die primitiveren Zahlen sind und als solche 23 und 28 gegenüber den Vorzug haben. Denn wenn die von Fließ angenommene Aequivalenz

* s. Anhang (2).

von 23 und 28 als Folge derjenigen von 3 und 5 erscheint, so verdienen die letzteren Zahlen nach einem allgemein wissenschaftlichen Gebrauch den Vorzug.

Man könnte sogar noch einen Schritt weitergehen und beweisen, daß die Fließ'schen Zahlen nicht „rein“ männlich, bzw. weiblich sind, sondern „gemischt“.

Der Beweis für die Aequivalenz von 23 und 28 ist sehr einfach:

$$28 = 5.5 + 3 \quad | = | \quad \{ 5(5 + 3) : 2 + 3 \} \quad | = | \quad 5.4 + 3 \quad | = | \quad 23$$

q. e. d.

Die beiden Zahlen 23 und 28 sind also äquivalent; denn wenn $3 \mid 5$, so muß 5 auch äquivalent sein der Hälfte von $(3 + 5)$, d. h. 4, womit die Formel bewiesen ist.

Ja noch mehr; 23 und 28 sind dann gar nicht Einheiten erster Dimension, sondern schon zweiter Dimension und zwar unreine!

Nun möge Fließ einmal den Spieß umdrehen und zeigen, daß sich 3 und 5 ebenfalls auf dieselbe Weise durch 23 und 28 darstellen lassen! Ich will nicht einmal so weit gehen wie Fließ und verlangen, daß es auf genau dieselbe Weise geschehen müsse. Und wenn es gelingt, soll Fließ erklären, warum seine Darstellung die richtige ist und man 3 und 5 nicht als „Grundzahlen“ wählen darf!

Hic Rhodus, hic salta!

Um aber zu zeigen, daß man mit 3 und 5 schon etliche Beispiele von Fließ mindestens so gut erklären kann wie mit 23 und 28, will ich einige aus dem Buche behandeln. Zuerst das von Fließ in beiden Auflagen als erstes behandelte, die Mensesdaten von Frl. H.

Frl. H. menstruierte

am	22. März 1896	Intervall
14.	April	23 Tage = 4.5 + 1.3 Tage
5.	Mai	21 „ = 3.5 + 2.3 „
31.	Mai	26 „ = 4.5 + 2.3 „
24.	Juni	24 „ = 3.5 + 3.3 „
15.	Juli	21 „ = 3.5 + 2.3 „
9.	Aug.	25 „ = 5.5 + 0.3 „
25.	Aug.	16 „ = 2.5 + 2.3 „
10.	Sept.	16 „ = 2.5 + 2.3 „
23.	Sept.	13 „ = 2.5 + 1.3 „
15.	Okt.	22 „ = 2.5 + 4.3 „
<hr/>		
10	I	= 30.5 + 19.3 Tage
	I	= 3.5 + 2.3 — 3/10 Tage

Man wird zugeben, daß die Zerlegung nicht schlecht ist, da sie jedes Intervall ohne irgendwelche Kunstgriffe, Umordnungen etc. glatt zerlegt. Ja noch mehr: wir finden für die Summe der 10 Intervalle $(30.5 + 19.3)$ Tage, also im Mittel $(3.5 + 2.3)$ Tage. Die Differenz von 3 Tagen auf ca. 7 Monate dürfen wir wohl, wie es auch Fließ an andern Orten in noch höherem Maße tut, vernachlässigen, und wie er annehmen, daß sie sich bei Berücksichtigung von weiteren Daten verkleinern oder aufheben werde.

Das ist aber noch nicht alles. Wir können noch sagen, der Menstruationstypus von Frl. H. sei 5 biologische Einheiten, und es sei sicher kein Zufall, daß es gerade $5 = 3 + 2 = 3 + (5 - 3) = 3 + \Delta$ seien! Man könnte sogar daran denken, eine Einteilung der Menstruationstypen vorzunehmen und damit die große, vielleicht nur scheinbare Mannigfaltigkeit der Einzelintervalle auf einige wenige Typen zu reduzieren.

Wollte man die Intervalle noch etwas anders, i. e. in einer für die Theorie noch „bessern“ Weise ordnen, so erhielte man sicher noch auffallendere Gesetzmäßigkeiten. Der Leser mag das selbst versuchen.

Ein anderes Beispiel (21) zeigt die Überlegenheit von 3 und 5 über 23 und 28 noch viel schlagender. Es handelt sich um folgende Intervalle von Migräneanfällen, die ich der Einfachheit halber ohne die zugehörigen Daten anführe:

37, 5, 5, 9, 5, 37, 9, 5, 17, 9, 6, 17, 9, 5

Wir erhalten dafür glatt ohne jede Umordnung:

$(5.5 + 4.3)$, 5, 5, 3.3, 5, $(5.5 + 4.3)$, 3.3, 5, $(1.5 + 4.3)$, 3.3, 2.3, $(1.5 + 4.3)$, 3.3, 5.

Auch hier könnte man durch Umordnung, und zwar nicht nur auf eine Art, noch viel schönere Darstellungen erhalten. Wir wollen uns indes damit nicht weiter abgeben, sondern die ganz einfachen Beispiele verlassen. Der Leser mag eventuell zum Vergleich auch Beispiele aus seinem eigenen Leben nach den Zahlen 3 und 5 sowie 23 und 28 zerlegen und sehen, welche Zerlegung ihn mehr befriedigt.

Wir wollen nunmehr ein Beispiel betrachten, das Fließ als besonders charakteristisch ansieht und von dem er behauptet, die von ihm mit 23 und 28 erhaltenen Beziehungen können durch kein anderes Zahlenpaar erhalten werden. Es betrifft die Geburtsabstände der Fließ'schen Kinder. Diese sind nach Fließ*:

* I, S. 34; II, S. 118.

$$\begin{aligned} \text{I} &= 984 = 16.23 + 22.28 \\ \text{II} &= 477 = 11.23 + 8.28 \\ \text{III} &= 1064 = 16.28 + 22.28 \end{aligned}$$

Davon sind I und III biologisch gleich, II die Hälfte. Ein Mathematiker hat für 7 und 12 eine Darstellung gefunden, so daß II die Hälfte von I ist, aber für III geht es nicht. Fließ behauptet nun: „Für zwei Werte reichen auch andere teilerfremde Zahlen aus, deren typisches Vorkommen in der Natur erst zu beweisen wäre! – Aber sie scheitern, sobald der dritte hinzukommt.“ (Annalen d. Naturphil. X, S. 328.)

Was das typische Vorkommen in der Natur betrifft, so habe ich für 3 und 5 den Beweis erbracht, und man wird zugeben, daß sie diese Bedingung mindestens in demselben Maße erfüllen wie 23 und 28. Es handelt sich also noch darum, die zweite Bedingung zu erfüllen, nämlich eine Darstellung zu finden, derzufolge man hat

$$\text{I} \mid = \mid \text{III} \mid = \mid 2.\text{II}.$$

Versuchen wir es einmal ganz direkt:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 984 \\ 3x + 5y &= 1064 \end{aligned}$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} x &= 108 \\ y &= 148 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} 984 &= 108.5 + 148.3 \\ 1064 &= 148.5 + 108.3 \end{aligned}$$

beide Male 256 biologische Einheiten!

Nun soll noch II biologisch die Hälfte von I resp. III sein. Direkt durch Halbierung geht es nicht. Man erhielte:

$$54.5 + 74.3 = 492 = 477 + 15 = 477 + 3.5$$

Das wäre noch nicht so schlimm. Fließ hat noch viel schlimmere Diskrepanzen zum Stimmen gebracht, und man könnte immerhin ganz bescheiden fragen, woher denn Fließ wisse, daß seine Zerlegung die richtige sei. Irgend einen objektiven Maßstab hat er doch nicht. Aber wir können ruhig noch versuchen, die Sache auf eine andere Weise zum Klappen zu bringen und zwar ohne lange zu probieren durch Auflösung einer Gleichung 1. Grades mit einer Unbekannten.

Wir schreiben dann:

$$\begin{aligned} 5x + 3(128 - x) &= 477 \\ 2x + 384 &= 477 \\ x &= 93 : 2 \\ 128 - x &= 163 : 2 \end{aligned}$$

Somit können wir schreiben:

$$\text{II} = 477 = (93.5 + 163.3) : 2$$

Damit ist glatt und schmerzlos bewiesen, was Fließ für unmöglich hielt, nämlich

$$\text{I} \mid = \mid \text{III} \mid = \mid 2.\text{II}$$

mit andern Zahlen als 23 und 28.

Fließ wird nun wahrscheinlich einwenden, daß seine Darstellung schöner und symmetrischer sei, und daß meine Darstellung nicht genau dasselbe leiste usw. Er wird aber nicht bestreiten können, daß seine Forderung erfüllt ist. Im übrigen glaube ich, daß man mit etwas Geduld auch noch eine „bessere“ Darstellung finden könnte. Ich halte es aber für absolut verlorene Zeit, noch weiter zu suchen und begnüge mich mit der gegebenen Darstellung, die innerhalb einiger Minuten auf dem angegebenen Wege gefunden worden ist. Es ist natürlich ein Zufall, daß es so glatt ging, und psychologisch war es vielleicht sogar falsch, daß ich mich überhaupt bemüht habe, die ganz ungerechtfertigte Forderung von Fließ zu erfüllen. Aber da Fließ und seine Anhänger aus der Nichterfüllung auf ein Nichterfüllen-können geschlossen hätten, wurde der Versuch gemacht.

Ich will nun noch ein Beispiel aus der Statistik anführen, das die Brauchbarkeit der beiden Zahlen 3 und 5 beweisen soll. Ich wähle dazu nicht wie Fließ die Totgeburtenquote, da diese Zahl viel zu unsicher ist, sondern das normale Geschlechtsverhältnis der Neugeborenen, das zu den allerstabilsten statistischen Zahlen gehört.

Auf Grund eines Materials von ca. 61 Millionen Geburten von Ländern Europas, wo die Registrierung zuverlässig ist, ergab sich nach Prinzing für Knaben- und Mädchengeburt ein Verhältnis von 106,3 : 100,0. Dieses Verhältnis soll nun durch die Zahlen 3 und 5 in einfacher Weise dargestellt werden.

Um dem Vorwurf auszuweichen, ich rücke die Zahlen willkürlich zurecht, was man Fließ mit Recht vorwerfen kann, wähle ich die klassische Methode für die angenäherte Darstellung von Verhältnissen großer Zahlen durch kleine, nämlich die Entwicklung in einen Kettenbruch und die Berechnung der Näherungswerte. Das

ist hier um so eher erlaubt, als das gefundene Verhältnis als empirische Größe sowieso mit einem Fehler behaftet ist, wenn es überhaupt einen Sinn hat, anzunehmen, es gebe einen „wahren“ Wert für dieses Verhältnis.

Man erhält für das Verhältnis den Kettenbruch:

$$106,3 : 100 = 1 (15, 1, 6, 1, 7)$$

Die Näherungswerte sind

$$16/15 \quad 17/16 \quad 118/111 \quad 135/127 \quad 1063/1000$$

Schon der 2. Näherungswert stellt das gegebene Verhältnis mit einem Fehler dar, der kleiner ist als $1 : 16.111 = 1 : 1776$, falls der dritte Teilnenner noch richtig ist, wofür man natürlich keine Garantie übernehmen kann. Nach der üblichen Darstellung des Fehlers könnte man immerhin behaupten, daß er sicher kleiner als $1 : 16^2 = 1 : 256$ sein müsse. Man könnte aber noch weiter gehen und sagen, daß er kleiner als $1 : 16.31 = 1 : 496$ sein müsse, da ja der 3. Teilnenner mindestens gleich 1 sein muß.

Über den Fehler, mit dem die gegebene Zahl behaftet ist, wissen wir nichts Positives. Man könnte zwar durch gewisse Wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen eine Grenze für den Fehler angeben, die er mit einer sehr großen Wahrscheinlichkeit nicht überschreitet. Aber alle diese Berechnungen sind doch viel zu unsicher, als daß man darauf weitreichende Schlüsse über die Genauigkeit von empirischen Zahlen bauen könnte. Wir können aber sagen, daß der Wert $17/16$ das Verhältnis von Knaben- zu Mädchengeburten mit einer Genauigkeit darstellt, die von dem gefundenen empirischen Wert $106,3 : 100$ aller Wahrscheinlichkeit nach nicht übertroffen wird, und daß wir demnach ein Recht haben, die gefundene einfachere Zahl unsern weitern Betrachtungen zugrunde zu legen.

Man erhält nun ohne weitere Schwierigkeiten und Kniffe:

$$17 : 16 = 34 : 32 = (5.5 + 3.3) : (4.5 + 4.3)$$

also eine Darstellung, die an Einfachheit und Durchsichtigkeit nichts zu wünschen übrig läßt.

Das möge Fließ mit „seinen“ Zahlen besser machen!

Daß es gerade 8 biologische Einheiten sind, ist doch sicher (!) auch kein Zufall, denn es ist ja $8 = 3 + 5$. Und daß im Zähler eine weibliche Einheit durch eine männliche ersetzt ist, erst recht nicht! Denn nach Fließ ist der Mensch zwittrig, und man müßte demnach erwarten, daß dieser Umstand auch in der Formel zum

Ausdruck komme, die das Verhältnis von Knaben- zu Mädchengeburten darstellt.

Wir können aber noch viel mehr aus unserer Formel herausholen, da wir doch gerade am Interpretieren sind. Da 3 und 5 biologisch äquivalent sind, so können wir eines durch das andere ersetzen und sie beide als äquivalent einer biologischen Einheit E setzen:

$$3 (=) 5 (=) E^*$$

und man hat ferner noch, da 4 die Hälfte von $(3 + 5)$ ist

$$4 (=) E$$

Unsere obige Formel schreibt sich deshalb symbolisch

$$17 : 16 = 34 : 32 (=) 2E^2 : 2E^2 (=) 1 : 1$$

d. h. nichts anderes, als daß in Wirklichkeit gleichviel Mädchen- und Knaben geboren werden müßten, und daß der Knabenüberschuß nur durch sekundäre Einflüsse bedingt ist, eine Hypothese, die die moderne Vererbungslehre schon seit längerer Zeit aufgestellt hat, und die wir hiemit mathematisch bewiesen hätten! Aber das ist immer noch nicht alles, was man aus der Formel lesen kann. Wir können der wichtigen Entdeckung von Fließ, daß, wenn 23 arithmetisch gleich 28 wäre, es keine Zwillinge gäbe, die noch viel wichtigere Entdeckung an die Seite stellen, daß, wenn $3 = 5$ wäre, es keine verschiedenen Geschlechter gäbe! Und man kann getrost die ganze Welt zur Widerlegung dieser These in die Schranken fordern.

Aber ich habe selbstverständlich diejenige Zahl ausgesucht, die mir am besten paßte, werden Fließ und seine Anhänger sagen. Abgesehen davon, daß dieser Einwand gerade bei diesen Leuten sehr wenig am Platze wäre, trifft er nicht zu, denn ich habe bei der ganzen Ableitung, besonders auch bei der Substitution des Wertes $17/16$ an Stelle des ursprünglichen Verhältnisses ein Minimum von Willkür walten lassen. Der gewählte Wert ergab sich als der, der wahrscheinlich den unbekanntem Wert mit genügender Genauigkeit darstellt und dabei zugleich noch zuverlässig ist, wenn man den Fehler der ursprünglichen Zahl in Betracht zieht. Es ginge aber auch ebensogut mit dem Wert $16/15$. Man hat nämlich:

$$16 : 15 = (2.5 + 2.3) : 3.5 (=) E^2 : E^2$$

Also auch hier wieder dieselben Schlußfolgerungen.

* Das Zeichen (=) soll bedeuten (biologisch)-äquivalent; vgl. Kap. 6. Ich habe es gewählt, damit Fließ nicht etwa Einspruch gegen Mißbrauch seines Zeichens erhebe.

Ein ganz verbohrtter Gegner könnte nun immer noch fordern, daß ich das Kunststück auch noch mit den beiden letzten Näherungswerten durchführe. Er müßte dabei allerdings denselben naiven Glauben in die absolute Genauigkeit der statistischen Zahlen haben, wie Fließ. Da die beiden letzten Näherungswerte nicht mehr zuverlässig sind, hat man aber keinen Grund, sich mit den größeren Zahlen zu quälen. Aber ich glaube, daß man auch da, und zwar mit beiden Zahlen, zum Ziele käme. Es sind der Möglichkeiten so viele, besonders wenn man sich noch in höhere Dimensionen hinaufwagt, daß es merkwürdig zugehen müßte, wenn es nicht ginge. Aber es hat wirklich keinen Sinn.

Man wird es daher wohl verstehen können, wenn ich Fließ nicht folge und mich nicht bemühe, die Totgeburtensquote zu interpretieren. Ich habe im Kapitel „Statistik“ die große Unsicherheit der Grundlagen genügend beleuchtet, so daß man mir nicht vorwerfen kann, die Trauben seien zu sauer!

Will jemand auf irgend einem Gebiete den Versuch einer solchen Darstellung unternehmen, so wird er am besten so vorgehen, wie hier gezeigt wurde. Es ist ganz entschieden wissenschaftlicher – wenn man das Wort hier überhaupt brauchen darf – so vorzugehen, als nach dem Muster von Fließ, der die gegebenen Zahlen ganz willkürlich ändert und dann hinterher durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung die Legitimität seines Vorgehens beweisen will.

Um aber doch dem Leser einen Begriff davon zu geben, wie leicht man mit solchen pseudowissenschaftlichen Methoden in die tiefsten Tiefen der Natur dringen kann, will ich noch einige Beispiele aus andern Gebieten bringen und empfehle sie Fließ zur Nachahmung mit „seinen“ Zahlen. Aber genau und ohne Änderung der Zahlen!

Als erstes Beispiel wähle ich ein rein mathematisches, nämlich den „goldenen Schnitt“.

1. Der goldene Schnitt.

Der goldene Schnitt hat einmal in der Ästhetik eine gewisse Rolle gespielt, und auch die naturphilosophische Spekulation verschiedener Zeiten hat in ihm etwas ganz Besonderes gesehen. Das Problem, das ihm zugrunde liegt, ist folgendes:

Es soll eine gegebene Strecke so geteilt werden, daß sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt verhält, wie dieser zum kleineren. Oder, etwas anders ausgedrückt, daß das größere Teil-

stück das geometrische Mittel zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Stücke ist.

Da die absolute Länge der Strecke keine Rolle spielt, können wir sie gleich 1 setzen. Ist dann das größere Stück gleich x , so ist das kleinere gleich $(1 - x)$ und man hat die Proportion:

$$1 : x = x : (1 - x)$$

Oder als Gleichung geschrieben nach Vornahme der nötigen Vereinfachungen:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Von den beiden (irrationalen) Wurzeln dieser Gleichung kommt nur die positive in Betracht. Sie ist

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,6180$$

Die Entwicklung in einen Kettenbruch, die hier nicht näher erörtert werden soll, liefert einen unendlichen Kettenbruch, dessen sämtliche Teilnenner gleich 1 sind. Man hat also

$$x = (1, 1, 1, \text{-----})$$

Die Näherungswerte sind

$$1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13 \text{-----}$$

Der fettgedruckte Wert $5/8$ stellt den Wert des Kettenbruches, d. h. die Wurzel der Gleichung mit einem Fehler dar, der kleiner ist als $1,2/100$.

Die Zahlen 3 und 5 sind also die Verhältniszahlen des goldenen Schnittes und man könnte sagen, daß irgend ein ganzes Urwesen, in dem weiblich und männlich noch vereint sind, nach dem goldenen Schnitt geteilt wurde und daß so das männliche und weibliche Prinzip in die Welt kamen. Was für ein Fund wäre das für eine naturphilosophische Zahlenspekulation, und was könnte man daraus alles schließen! Könnte nicht gerade der Umstand, daß das Verhältnis irrational ist, der tiefste Grund dafür sein, daß Mann und Weib einander so wenig verstehen, verstehen können? Was würde Strindberg dazu sagen! Und auch in dem Geschlechtsverhältnis der Neugeborenen kommt dieser goldene Schnitt wiederum zur Geltung.

Das hat auch noch niemand gefunden, könnte ich sagen, und es ist gewiß sehr interessant. Es ist sogar bedauerlich, daß wir heutzutage nicht mehr den Glauben aufbringen können, in solchen Dingen tiefste Weisheit zu sehen, sondern sie als bloße Zahlenspielerien betrachten.

2. Harmonische Teilung einer Saite.

Eine weitere interessante Anwendung unserer Zahlen ergibt die harmonische Teilung einer Saite. Man versteht darunter die Aufgabe, eine Saite so zu teilen, daß die Töne, die von der ganzen Saite und den beiden Teilstücken erzeugt werden (unter gleichen Bedingungen natürlich) einen Wohlklang bilden. Das ist dann der Fall, wenn die Längen der 3 Saiten eine harmonische Proportion bilden.

Drei Größen a, b, c bilden eine harmonische Proportion, wenn die Proportion besteht

$$(a - b) : (b - c) = a : c$$

So hat man z. B. für den vollkommensten Zusammenklang, den Durdreiklang *CEG* mit den relativen Schwingungszahlen 4, 5, 6, die relativen Saitenlängen 15, 12, 10, und man hat in der Tat

$$(15 - 12) : (12 - 10) = 15 : 10$$

Wir können schon hier unsere Zahlen finden, unter Hinzunahme der äquivalenten 4. Wenn wir uns auf die hauptsächlichsten Konsonanzen beschränken, nämlich die folgenden mit den beigefügten relativen Schwingungszahlen:

<i>CF</i> Quarte	3 : 4
<i>CE</i> gr. Terz	4 : 5
<i>CA</i> Sexte	3 : 5

so finden wir, daß die Schwingungszahlen biologisch äquivalent (!) sind, und werden uns daher nicht wundern, daß sie harmonisch klingen. Für Quinte und kleine Terz stimmt das nicht. Da müßte man irgend etwas anderes finden, was natürlich auch nicht schwierig wäre.

Hingegen hat man wieder für den Akkord

$$C : E : G : c = 4 : 5 : 6 : 8$$

d. h. die beiden ersten Zahlen sind biologisch äquivalent, und die beiden letzten sind das Doppelte davon, weil -- man in die höhere Oktave kommt!

Gehen wir aber nunmehr zu unserem Problem der harmonischen Teilung über! Bezeichnen wir wieder die Länge der ganzen Saite mit 1, die Länge des größeren Teilstückes mit x und die des kleineren folglich mit $(1 - x)$.

Dann muß man haben:

$$(1 - x) : [x - (1 - x)] = 1 : (1 - x)$$

Verwandelt man die Proportion in eine Gleichung, so erhält man nach Vornahme der nötigen Reduktionen die quadratische Gleichung

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

mit den Wurzeln

$$x_1 = 2 + \sqrt{2} \quad ; \quad x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

von denen nur die zweite in Frage kommt.

Wir entwickeln sie in einen Kettenbruch und erhalten den gemischt periodischen Kettenbruch

$$2 - \sqrt{2} = (1, 1, 2, 2, 2, \dots)$$

Die Näherungswerte sind

$$1/1 \quad 1/2 \quad 3/5 \quad 7/12 \quad 17/29 \quad 41/70 \quad 99/169 \quad \dots$$

Die beiden ersten Teilnenner sind die gleichen wie bei dem goldenen Schnitt, und auch der Wert $3/5$ kommt noch vor, der daher sowohl für den goldenen Schnitt als die harmonische Teilung als Näherungswert gelten kann. Es liegt nämlich 0,6 so ziemlich in der Mitte zwischen dem Wert für den goldenen Schnitt und dem für die harmonische Teilung.

Man hat nämlich für die beiden Werte:

Goldener Schnitt	0,613034 = 0,6 + 0,014
Harmonische Teilung	0,585786 = 0,6 - 0,013

Die Teilung einer Saite im Verhältnis 3 : 2 liefert in der Tat einen harmonischen Klang. Wir haben für die Längen der 3 Saiten die Proportion:

$$5 : 3 : 2$$

Dem entsprechen, da die Schwingungszahlen umgekehrt proportional den Längen der Saiten sind, die Verhältnisse:

$$1/5 : 1/3 : 1/2 = 6 : 10 : 15 \quad (1)$$

Wir können aber das Problem noch etwas weiter fassen und im Sinne Riemanns verfahren. Wir würden dann unsere Zahlen nicht als Saitenlängen auffassen, sondern direkt als relative Schwingungszahlen, und erhalten dann

$$1 : 3/5 : 2/5 = 5 : 3 : 2 \quad (2)$$

Der ersten Proportion entspricht ein aufsteigender Dreiklang, der zweiten ein absteigender, und zwar hat man für (1)

$$c' : a' : e''$$

resp. in nächste Nähe zusammengerückt

$$c' : e' : a'$$

Für (2) hat man

$$c' : g' : e''$$

resp. durch Zusammenrücken

$$c' : e' : g'$$

Der zweite Akkord ist der fundamentale Durdreiklang, der erste dagegen ein *a*-Molldreiklang.

Man erhalte übrigens auch noch durch den folgenden Näherungswert des goldenen Schnittes, den wir unserer Betrachtung zugrundegelegt haben, nämlich $5/8$, wohlklingende Dreiklänge, wovon sich der Leser durch Anwendung der hier auseinandergesetzten Prinzipien selbst leicht überzeugen kann. Sie sind indes doch nicht mehr so wohlklingend, wie die eben betrachteten.

Diese Beispiele aus der Akustik sollen für unsere Zwecke genügen. Worauf es mir ankam, war, dem Leser zu zeigen, daß es gar nicht so furchtbar schwer ist, mit ein paar Zahlen alle möglichen Naturgeheimnisse zu entschleiern und zwar um so sicherer, je üppiger die Phantasie ins Kraut schießt, und je weniger die Kritik mitspricht.

So böte es z. B. nicht die geringsten Schwierigkeiten, von unseren Zahlen ausgehend, ganz neue Fundamente für die Harmonielehre zu legen. Wir brauchten nur darauf aufmerksam zu machen, daß die Konsonanzen biologisch durch den Wert 1 oder 2 dargestellt sind, womit wir die Harmonielehre, die zwar bereits mit einfachen Zahlen operiert, auf die einfachste Form gebracht hätten!

Und nun möge Fließ mit „seinen“ Zahlen wenigstens diese Kunststückchen versuchen! Im Sinne seiner Theorie können das natürlich keine bloßen Zahlenspielerien sein, sondern es muß ein tieferer Sinn dahinterstecken. Er braucht ja nun nicht einmal mehr das Material zusammenzutragen, da ich das schon für ihn besorgt habe.

Wie leicht man übrigens mittels einfacher symbolischer Rechnungen im Sinne von Fließ sogar mit transzendenten Zahlen fertig wird, soll noch der folgende kurze „Beweis der biologischen Äquivalenz der Zahlen 3, 4 und 5 mit der Basis der natürlichen Logarithmen“ zeigen.

Die Basis der natürlichen Logarithmen e ist angenähert

$$e = 2,71828$$

Der Kettenbruch dafür ist

$$e = 2 (1, 2, 1, 1, 4 \dots)$$

Die Näherungswerte sind

$$2/1 \quad 3/1 \quad 8/3 \quad 11/4 \quad 19/7 \quad 87/32$$

Der fettgedruckte Wert weicht vom wahren Wert um weniger als $5/10\,000$ ab. Wir können ihn also dem Beweis zugrunde legen. Wir können sogar sagen, daß die Zahlen 3 und 5 schon vom 2. Näherungswert ab ganz deutlich in Evidenz kommen. Da aber die betreffenden Werte noch zu stark vom wahren Wert von e abweichen, würde das nicht viel besagen. Anders mit dem Wert $87/32$.

Zerlegen wir den Bruch, so können wir schreiben:

$$\begin{aligned} 87/32 &= (12.5 + 9.3) : (4.5 + 4.3) \\ &= (3.4.5 + 3^3) : (4.5 + 4.3) \end{aligned}$$

Schreiben wir wieder für eine biologische Einheit das Zeichen E , so haben wir

$$87/32 (=) 2 E^3 : 2 E^2 = E$$

Das heißt aber nichts anderes, als daß die Zahl e biologisch äquivalent einer biologischen Einheit ist!

3. Divergenz der Blattstellung.

Da der goldene Schnitt auch in der Stellung der Blätter am Stengel eine Rolle spielt, können wir eine ganze Reihe hieher gehöriger Fälle für die Zahlen 3 und 5 in Anspruch nehmen. Ich gehe indes nicht näher darauf ein. Der Leser findet das Diesbezügliche in jedem Lehrbuch der allgemeinen Botanik und kann die Verhältnisse nach den hier gegebenen Mustern interpretieren.

4. Astronomische Beispiele.

a) Schiefe der Ekliptik.

Die Neigung der Ebene des Himmelsäquators gegen diejenige der Ekliptik beträgt ca. $23,5^\circ$. Sie ist im Laufe der Zeit sehr geringen Schwankungen unterworfen.

Der Winkel von $23,5^\circ$ verhält sich zum ganzen Kreis wie 1 : 15. Da $15 = 3 \cdot 5$, so finden wir auch hier unsere Zahlen wieder, und wir können mit demselben Recht, wie Fließ die elliptische Gestalt der Erdbahn in Beziehung zum Leben auf der Erde bringt, die Schiefe der Ekliptik dafür verantwortlich machen, weil – ja weil da die beiden Zahlen 3 und 5 vorkommen. Wir fänden demnach unsere Zahlen sogar im Sonnensystem wieder!

Und weil wir gerade dabei sind, außerirdische Verhältnisse zu betrachten, wollen wir noch ein zweites Beispiel nehmen:

b) Umläufe von Venus und Erde um die Sonne.

Man versteht unter siderischem Umlauf eines Planeten die Zeit, die verstreicht zwischen zwei gleichartigen Stellungen des Planeten gegen einen Fixstern. Unter synodischem Umlauf dagegen die Zeit zwischen zwei gleichartigen Stellungen des Planeten gegen die Sonne, also die Zeit zwischen zwei Konjunktionen oder Oppositionen mit der Sonne, die beim Monde dem Neumond, bzw. Vollmond entsprechen.

Es kommen nun mit großer Annäherung auf

13 siderische Umläufe der Venus			
5 synodische	"	"	"
8 siderische	"	"	Erde.

Also wiederum das Zahlenpaar 3 und 5! Ich denke, das mag genügen. Wer noch mehr will, mag bedenken, daß 3 die erste Dreieckszahl, 5 die erste Fünfeckszahl und die Hälfte ihrer Summe, 4, die erste Quadratzahl ist, wenn man von der Eins absieht.

Es würde gar keine Schwierigkeiten machen, die Beispiele noch fast beliebig zu vermehren. Jedenfalls scheint aber schon jetzt der Beweis erbracht, daß die beiden Zahlen 3 und 5 mindestens das leisten, was die Zahlen 23 und 28.

Es hat ein okkultistisch orientierter Astronom (H. Kritzinger) in einem Buche, „Der Pulsschlag der Welt“, S. 3-39, die männliche und die weibliche Periode aus kosmischen Perioden abgeleitet.

Die 23tägige Periode soll nach Kritzinger durch die positive Interferenz der etwa 21 Wochen betragenden „Witterungsperiode“ mit dem tropischen Mondumlauf von ca. $27\frac{1}{3}$ Tagen entstehen.

Die 28tägige dagegen durch negative Interferenz des tropischen Mondumlaufs mit der Periode von 3,2 Jahren, die das Doppelte des synodischen Umlaufs von Venus und Erde sein soll.

Kritzinger hält diese „Entdeckung“ für sehr wertvoll. Ich glaube, daß man nach Aufdeckung der Unhaltbarkeit der Fließ'schen Theorie diese Entdeckung ruhig sich selbst überlassen darf und daß kein Grund besteht, sie kritisch zu untersuchen. Durch geeignete Kombination von planetarischen Cyklen lassen sich eine ganze Reihe von Perioden ableiten, denen man sicher nicht von vornherein jede Bedeutung absprechen kann. Aber es ist doch eine

sehr gewagte Sache, die unhaltbare Lehre von Fließ durch eine so unsichere Theorie wie die der Kritzinger'schen Perioden stützen zu wollen.

Um noch eine kurze Vorstellung davon zu geben, in welcher Art Fließ seine Kritiker abtut, will ich seine Methode der Kritik gegen ihn selbst ins Treffen führen. Fließ glaubt nämlich, seine Gegner dadurch zu widerlegen, daß er einfach die von ihnen vorgeschlagenen Zahlen in die von ihm gefundenen Ausdrücke einsetzt und nachweist, daß dabei ein Unsinn herauskommt (II, S. 255ff.).

Wir wollen einmal die oben gefundene Darstellung des Geschlechtsverhältnisses durch 3 und 5 auf die Zahlen 23 und 28 übertragen.

Wir haben gefunden:

$$\begin{array}{r} \text{Knaben} \\ \hline \text{Mädchen} \end{array} = \frac{5.5 + 3.3}{4.5 + 4.3}$$

Das würde für die Fließ'schen Zahlen ergeben:

$$\frac{5.28 + 3.23}{4.28 + 4.23} = \frac{209}{204} = \frac{102,4}{100}$$

Es geht auch nicht, wenn man die Koeffizienten anders interpretiert und als Perioden resp. Mittel aus den beiden Perioden ansieht; denn man erhält dann 101 : 100. Und dennoch zweifle ich nicht, daß sich mit einiger Geduld auch mit den Fließ'schen Zahlen eine einigermaßen befriedigende Darstellung geben läßt, auch wenn Fließ sie bis jetzt noch nicht gefunden hat. Es wäre aber auch wieder schade um die Zeit, die man darauf verwendet.

Fließ könnte nun immer noch verlangen, daß ich auch einen seiner Parafälle mit den Zahlen 3 und 5 darstelle, z. B. die Familie A. v. Humboldts, der durch seine bestechende Einfachheit, wie Fließ wenigstens meint, eine glänzende Bestätigung seiner Theorie sein soll. Auch der Mathematiker A. Pfennig bezeichnet diesen Fall als einen glänzenden Triumph der Fließ'schen Periodenberechnung und als „ein lohnendes Ziel der Nacheiferung für diejenigen, welche sich bisher mit der Erklärung begnügt haben, solches auch mit beliebigen andern Zahlen leisten zu können, ohne zu dieser Leistung auch nur die geringsten Anstalten zu treffen!“ (S.30).

Nun gehöre ich zwar in gewissem Sinne auch zu denen, die glauben, daß man das Kunststück in ähnlicher Weise ebensogut mit andern Zahlen fertig bringe und speziell mit den Zahlen 3 und 5. Ich habe aber gar keine Lust, die eventuell doch etwas

mühsame Rechnung zu machen. Die ganze Ableitung schwebt solange in der Luft, als Fließ nicht den unwiderleglichen Beweis dafür liefert, daß es wirklich auch genau 144 943 Tage sind.

Er hat an einer andern Stelle selbst geschrieben:

„Hätte diese erste Summe auch nur um einen Tag mehr -- Damit wäre alle Analogie dahin! Die Analogie besteht lediglich für den durch die Natur gegebenen Zahlenwert.“

Da wir im Kapitel IX,3 sehen werden, daß es sehr unwahrscheinlich ist, daß das von Fließ gefundene Resultat auf den Tag genau ist, haben wir gar keine Veranlassung, eine eventuell ziemlich mühsame Rechnung auch nur zu versuchen.

Aber ganz abgesehen davon hätte die Formel, selbst wenn sie richtig wäre, gar keine Bedeutung. Es ist eine „schöne“ Formel im mathematischen Sinne. Aber worin sollen wir das Kriterium dafür suchen, daß es nicht ein reines Phantasiegebilde ist, etwa wie eine schöne Marslandschaft, die uns ein phantasiebegabter Maler auf die Leinwand zaubert und die er als „wirkliche“ Marslandschaft gewertet haben will?

II. STATISTIK

Die Anwendungen der Fließ'schen Theorie auf die Statistik, d. h. die Deutung gewisser statistischer Verhältniszahlen als Quotienten einfacher Vielfacher der Zahlen 23 und 28, ist ein ganz böses Kapitel. Das stolze Wort von Gauß: Gott rechne, das Fließ diesem Kapitel als Motto vorsetzt, dürfte besser durch ein bekanntes Zitat aus Hamlet ersetzt werden, das die Situation treffender charakterisieren würde.

Die Art und Weise, wie Fließ es immer wieder fertigbringt, seine Zahlen in Evidenz zu setzen, hat etwas Faszinierendes, das bei vielen Lesern den Gedanken gar nicht aufkommen läßt, daß Fließ auch vor den größten Ungereimtheiten nicht zurückschreckt.

Sehen wir einmal zu, wie Fließ vorgeht! Er schreibt in II, Kap. 20, „Theorie des Geschlechtsverhältnisses“:

„Solange es eine geordnete Statistik der Knaben- und Mädchen- geburten gibt, hat man ausgezählt, daß 105 bis 106 lebende Knaben auf 100 lebende Mädchen geboren werden.“

Folglich wählt man irgend ein Verhältnis aus diesem Intervall, das sich durch 23 und 28 in einfacher Weise darstellen läßt, und die Sache ist erledigt, der „Beweis“ geliefert!

Dieser Satz findet sich natürlich nicht bei Fließ, wie der geneigte Leser gerne glauben wird; aber er charakterisiert das Vorgehen von Fließ am besten.

Bei Fließ geht es selbstverständlich viel komplizierter zu; denn ein Vorgehen wie das oben geschilderte würde auch dem beschränktesten Leser die Augen öffnen. Fließ läßt daher einen Mathematiker aufmarschieren, der durch wahrscheinlichkeitstheoretische Berechnungen die Fließ'sche Theorie stützen, legitimieren soll. So glaubt wenigstens Fließ, und viele Leser haben ihm auch geglaubt, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung seine Theorie stütze.

Selbst wenn man davon absieht, daß der Mathematiker das Problem in einer Weise anfaßt, wie es nach den Arbeiten von Lexis u. a. tatsächlich nicht mehr statthaft ist, und auch noch davon absehen wollte, daß die von A. Patzig angewandte Formel für die Be-

rechnung der in Frage kommenden Wahrscheinlichkeit bei so großer Schiefheit der Verteilung nicht mehr ohne weiteres angewandt werden darf, kann man nicht mehr sagen, als daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung, soweit sie überhaupt in Frage kommt, gegen die von Fließ vorgenommene Substitution – nicht etwa die Interpretation! – nichts einzuwenden habe. Sie hätte aber auch gegen eine ganze Menge anderer Substitutionen ebenfalls nichts einzuwenden, ja müßte sogar sehr vielen von ihrem Standpunkt aus vor der Fließschen den Vorzug geben. Tatsächlich hat aber die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der ganzen Geschichte nichts zu tun. Sie könnte höchstens Anleitung geben, wie man aus einer Reihe von voneinander abweichenden Werten auf die einfachste Weise einen Wert ableitet, der, unter gewissen Voraussetzungen wenigstens, als der zuverlässigste gelten kann. Man könnte sich eventuell auch noch die Aufgabe stellen, aus den durch sehr große Zahlen dargestellten Verhältnissen ihnen möglichst nahekommende Verhältnisse durch kleinere Zahlen darzustellen. Das können wir durch Kettenbruchdarstellung erreichen, und gehen in diesem Falle mit einem Minimum von Willkür vor, wie jeder Mathematiker weiß.

Bei solchem Vorgehen hätte man soliden Boden unter den Füßen. Das tut aber Fließ nicht, sondern geht in der geschilderten Weise vor, und da die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein solches Vorgehen nicht verbietet, ist es – erlaubt, und Fließ sagt dann auch ganz kühn: „Unsere Interpolation war demnach zweifellos (vom Ref. gesperrt) erlaubt“ (I, S. 436).

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wollen wir etwas ins Detail gehen und sehen, wie durch die Fließ'sche Lehre die Statistik „geklärt“ wird.

Fließ interpretiert die relative Häufigkeit der Totgeburten, der Mehrlingsgeburten, das Geschlechtsverhältnis der Neugeborenen, Geschlechtsverhältnisse bei Tieren und Pflanzen und die Verteilung von verschiedenen Krankheiten und Todesursachen auf die beiden Geschlechter und findet immer wieder, daß sein Schlüssel alle Tore öffne. Beschäftigen wir uns zuerst mit dem Glanzpunkte seiner Theorie, der Interpretation der Häufigkeit der Totgeburten.

Eigentlich müßte Fließ dem Leser zuerst verraten, was man in der Statistik der einzelnen Länder (!) unter Totgeburten versteht. Als Totgeburten werden in der Statistik nämlich nicht die totgeborenen Früchte schlechthin angeführt, wie man wohl denken könnte, sondern nur diejenigen, die nach Ablauf des 6. Schwanger-

schaftsmonates zur Welt kommen, zu einer Zeit der Schwangerschaft, wo sie sonst lebensfähig wären. Man nimmt nun an, daß dies nach Ablauf des 6. Schwangerschaftsmonats der Fall sei; daher die obige, sonst nicht so ohne weiteres verständliche Festsetzung.

Es ist wohl ziemlich klar, daß ein so definiertes statistisches Objekt zahlenmäßig nur sehr schlecht faßbar ist. Die Momente, die für die Entscheidung in Betracht kommen, sind die Angaben der Schwängern über die Dauer der Schwangerschaft und die Größe der Früchte, beides Momente, die in zweifelhaften Fällen keine sichere Entscheidung erlauben.

Dazu kommt aber eine ganze Reihe von weitem Umständen, die die Unsicherheit noch erhöhen. So kommt es vor, daß Kinder so rasch nach der Geburt sterben, daß man im Zweifel ist, ob sie überhaupt gelebt haben. Überdies besteht in katholischen Ländern die Neigung, auch totgeborenen Früchten noch die Nottaufe zukommen zu lassen, was nur möglich ist, wenn das Kind nicht als totgeboren, sondern als erst nach der Geburt gestorben rubriziert wird etc. etc. Alles in allem genommen sind die Fehlerquellen, die bei der Registrierung der Totgeburten in Betracht kommen, so zahlreich, daß man diese Zahlen sicher als mit zu den unsichersten der Geburtenstatistik gehörend rechnen muß. Nur wer absolut nicht mit den tatsächlichen Verhältnissen vertraut ist, kann auf den Gedanken kommen, mit solchen Zahlen überhaupt rechnen, sie als Grundlage für sehr weitgehende Schlüsse benutzen zu wollen. Der Leser wird daher die Berechtigung des folgenden Ausspruches von Fließ ohne weiteres ermessen können:

„Nun ist ja zweifellos, daß in dem Totgeburten-Knabenüberschuß eine naturgegebene Größe vorliegt“ (II, S. 251).

Selbst ohne Kenntnis der oben angeführten Tatsachen aus der Bevölkerungsstatistik, die jemand, der sie als Ausgangspunkt für sehr weitgehende Schlüsse benutzt, doch kennen müßte, hätte Fließ als Mediziner wissen müssen, daß die Häufigkeit der Totgeburten auch noch von – sagen wir einmal im Gegensatz zu tiefliegenden biologischen – akzidentellen Momenten abhängt, wie chronische Infektionskrankheiten (Syphilis), chronische Vergiftungen usw. Jedenfalls müssen wir mit einer ganzen Menge von Einflüssen rechnen, die die „reinen“ biologischen Zahlen, falls solche überhaupt existierten, in ganz unkontrollierbarer Weise stören. Das geht auch aus den Zahlen der Statistik ohne weiteres hervor, falls man sich – etwas umsieht.

Sehen wir von den Ländern ab, in denen die Registrierung der Totgeburten ganz unzuverlässig ist, so zeigt die Häufigkeit der Totgeburten in den verschiedenen Ländern sehr große Schwankungen. Von einem Werte von 2,2 % an haben wir eine ganze Skala von Übergängen bis zu den höchsten Werten von ca. 4,5 %, also Schwankungen, die mehr als 100 % des kleinsten Wertes betragen.

Kann ein vernünftiger Mensch auf solchen Grundlagen eine mathematisch-biologische Theorie aufbauen? Und mehr noch: ist es nicht sinnlos, aus diesen ganz unzuverlässigen Grundlagen diejenige statistische Verhältniszahl „abzuleiten“, die als die konstanteste aller statistischen Verhältniszahlen angesehen werden muß, das Geschlechtsverhältnis der Neugeborenen? Schon das primitivste wissenschaftliche Gefühl sträubt sich gegen eine solche Methodik.

Aber Fließ erklärt ganz kühn: „Das Sexualverhältnis der Totgeburten, die Häufigkeit der Totgeburten und das Sexualverhältnis der Lebendgeburten sind hier zum erstenmal in eine durchsichtige Abhängigkeit voneinander gebracht“ (II, S. 250).

Bei solcher Rechnerei ist natürlich alles und verschiedenes möglich. Man wundert sich schließlich gar nicht mehr, daß Fließ für die ehelichen und unehelichen Totgeburten ein fundamental differentes biologisches Verhalten annimmt, indem die ersteren den reziproken Wert der weiblichen, die letzteren den reziproken Wert der männlichen Periode darstellen. Wäre Fließ auch nur noch der geringste Rest von Kritikfähigkeit seiner Theorie gegenüber erhalten geblieben, so hätte ihm dieser ein energisches „nicht weiter!“ zuzurufen müssen. Aber Fließ ist von der Richtigkeit seiner Anschauungen so durchdrungen, daß er den umgekehrten Weg geht und allein seiner Theorie zuliebe biologische Verschiedenheiten in einem Material annimmt, wo jeder mit der Materie auch nur oberflächlich Vertraute genügende Erklärungen in akzidentellen Momenten findet.

Fließ hat dann allerdings in der 2. Auflage die Sache mit den unehelichen Totgeburten berichtigt, da die Nachprüfung ergab, daß er einem Druckfehler zum Opfer gefallen war. Im Prinzip aber bleibt er bei seiner Auffassung und schreibt:

„Nun mag ich diesem Verhältnis 1 : 28 sein Korrelat zurzeit nicht direkt gegenüberstellen.“ (II, S. 248).

Aufschlußreich für die von Fließ befolgte Methodik sind auch seine Untersuchungen über Zwillings- und Drillingsgeburten. Nach Fließ ist „die Anzahl der einfach geborenen Individuen um zwei

biologische Dimensionen höher als die Anzahl der Chorionzwillingsindividuen“.

Ferner sollen „... auf je 28² und 28.23 Geborene 23 Zwillingsindividuen kommen“. (II, S. 257).

Fließ geht aus von einer Zusammenstellung von Guzzoni degli Ancarnani, der nach ihm die größte Statistik über Mehrlingsgeburten gemacht haben soll, und stellt fest, daß nach dem Autor das Verhältnis von Zwillingsgeburten zu einfachen Geburten sei wie

$$1 : 87,83 \quad (\text{I, S. 434})$$

$$1 : 86,82 \quad (\text{II, S. 256})$$

Er schreibt deshalb die beiden Werte wie folgt:

$$5.28 : (23^3 + 129)$$

$$5.28 : (23^3 - 12)$$

und läßt dann für die weitere Betrachtung beide Male den Rest weg! Auf diese kleine Korrektur wollen wir nicht weiter eintreten. Fließ hat, wie schon eingangs erwähnt, eine Stütze in der Wahrscheinlichkeitstheorie zu finden geglaubt. Er hat auch die Ausgangszahl der 1. Auflage in der 2. korrigiert. In der 1. Auflage heißt es zwar ausdrücklich einfache Geburten, während es sich in der 2. Auflage um die Gesamtzahl der Geburten als Basis handeln soll. Interessant ist aber doch, daß Zahlen, die um 141 auseinanderliegen, zum gleichen Schlußresultat führen. Das ist auch das berühmte Prinzip von Kaspar Schlich:

„Wenn mir aber was nicht lieb,
Weg damit ist mein Prinzip.“ (Wilh. Busch.)

Interessant ist die Deutung, die Fließ seinem Funde gibt, daß auf 5.28 Zwillingsgeburten 23³ einfache Geburten kommen:

„Der Satz besagt, daß wenn 28 gleich 23 wäre, so gäbe es überhaupt keine Zwillinge. Denn 5 = 28 — 23 wäre dann Null.“ (I, S. 434.)

Schon möglich! Wahrscheinlich wäre auch noch eine ganze Menge von Dingen anders, wenn 28 = 23 wäre!

Lassen wir indes solche Spekulationen beiseite und sehen einmal zu, was die Statistik über Mehrlingsgeburten zu sagen weiß!

Da finden wir wieder, was jeder mit statistischen Verhältnissen nur einigermaßen Vertraute von vornherein fast als sicher annehmen würde: daß die Zahlen nicht nur für die einzelnen Länder, sondern sogar für einzelne Gegenden sehr schwanken. Nach Neeffe und Prinzing, die sich auf ein Material von ca. 50, resp. 63 Millionen

Geburten stützen, kommen auf 100 000 Geburten 1208 resp. 1167,7 Zwillingsgeburten, während nach Guzzoni deren 1139 kämen.

Das sind, in Hinsicht auf das große Material, schon ganz erhebliche Differenzen. Geht man weiter, so findet man, daß die Häufigkeiten noch viel mehr schwanken. Nehmen wir z. B. die Zahl der Mehrlingsgeburten auf 1000 Geburten berechnet zum Ausgangspunkt unserer Betrachtung. Es kommen darin zwar noch die Drilling- und Vierlingsgeburten vor, was aber, da diese letzteren nur 1,2–1,3 % der Mehrlingsgeburten ausmachen, ohne wesentliche Bedeutung ist.

Dann finden wir, daß schon für Deutschland die Zahlen zwischen 12,3 und 13,2, also um ca. 9 ‰ schwanken. In der ehemaligen Monarchie Österreich-Ungarn sind die Schwankungen noch viel bedeutender. Sie reichen von 11,6 ‰ bis 15,8 ‰. In Italien endlich treffen wir in den einzelnen Provinzen Zahlen, die von 8,0 ‰ bis 14,8 ‰ schwanken. Dabei ist eine unverkennbare Zunahme der Mehrlingsgeburten nach Norden hin deutlich ausgesprochen; sowohl in Italien als auch im übrigen Europa. Die niedrigsten Zahlen finden wir in den südlichen Provinzen von Italien und Spanien, die höchsten im Norden von Europa.

Und aus dieser Zahlenmenge, die ihm allerdings terra incognita ist, greift Fließ diejenige Zahl heraus, die ihm gerade zufälligerweise unter die Augen kommt, und rechnet ohne den geringsten kritischen Skrupel drauflos.

So findet er denn gewisse Grundzahlen für statistische Verhältnisse, die man als apriorische Wahrscheinlichkeiten anzusprechen hätte. Auf Grund dieser Annahme läßt sich dann die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß ein bestimmter Wert an Stelle des theoretisch genauen (des mittleren) Wertes auftritt. Das ist aber eine reine Spielerei ohne jeden wissenschaftlichen Wert. Dasselbe gilt auch für die von Prof. Alb. Patzig in der 2. Auflage gemachten Berechnungen. Da sicher die wenigsten Leser des Fließ'schen Buches etwas von Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendung auf biologische Verhältnisse verstehen, hätte Herr Patzig die Pflicht gehabt, die Voraussetzungen, auf denen seine Berechnung ruht, und die Schlüsse, die man daraus zu ziehen berechtigt ist, so ausführlich darzulegen, daß auch ein Nichtmathematiker wenigstens im Prinzip sieht, worum es sich handelt. Hätte der Leser diese beiden Dinge klar vor Augen, so würde er sich zu den Fließ'schen Schlüssen ganz anders kritisch einstellen.

Fließ hat in der 2. Auflage verschiedene Dinge, auf die er in der ersten noch ziemlichen Wert legte, unter den Tisch fallen lassen. Dazu gehört z. B. der Versuch, die Lebensdauer von Mann und Weib mit den Zahlen 23 und 28 in Beziehung zu setzen. Da Fließ diesen Versuch in der 2. Auflage selbst nicht mehr erwähnt, brauche auch ich mich wohl nicht weiter mit der Widerlegung zu befassen. Vom psychologischen Standpunkt aus ist diese Tatsache aber nicht ohne Bedeutung.

Hingegen wollen wir ein anderes Beispiel etwas kritisch betrachten, nämlich das Sexualverhältnis bei Tieren und Pflanzen.

Fließ analysiert Bestäubungsversuche, die von Correns und Straßburger an *Melandryum alb.* angestellt wurden, und deutet das bei diesen Versuchen erhaltene Sexualverhältnis der Pflanzen, sowie besonders auch das Verhältnis der Anzahl der Zwitter zur Gesamtzahl der Pflanzen. Die Art des Vorgehens ist dabei wieder absolut typisch für die Fließ'sche Methodik. Er schreibt II S. 434.:

„Unter 1422 Pflanzen (*Melandryum*), die durch Bestäubung von vier verschiedenen *W* mit alten Pollen eines *M* entstanden waren, befanden sich 28 (vom Autor gesperrt) Zwitter = 1,97 %. Unter 2327 Pflanzen, die bei den gleichen Eltern durch Bestäubung mit sehr viel und ganz frischen Pollen hervorgegangen waren, gab es nur 1 Zwitter = 0,043 %.“

Jeder vernünftige Biologe würde daraus schließen, daß wahrscheinlich mit steigendem Alter des Pollens die Zahl der Zwitter c. p. zunimmt, und würde versuchen, diese Vermutung durch weitere Experimente zu stützen, sintemal es ja bekannt ist, daß auch bei Tieren, z. B. bei Fröschen nach Versuchen von R. Hertwig, das Sexualverhältnis der Embryonen vom Alter der Eier und Spermien abhängt, so daß also die oben erwähnte Annahme durchaus gut begründet ist.

Nicht so Fließ, der in den Resultaten nur eine Möglichkeit sieht, seine Theorie zu bestätigen. Er scheint nicht zu wissen, daß man mit dem 2. Resultat, das eine so äußerst kleine relative Häufigkeit für die Zwitter ergibt, überhaupt nichts Positives anfangen kann, da es viel zu unsicher ist. Er rechnet mit diesen mit Fehlern behafteten Zahlen so, als ob es sich um absolute Werte handelte und der liebe Gott persönlich die Garantie für deren Richtigkeit übernommen hätte.

Es hat keinen Zweck, auch noch die andern Beispiele zu analysieren. Es kann sich ja nicht darum handeln, jedes einzelne Beispiel zu widerlegen, sondern nur darum, zu zeigen, daß die Methode vollständig unhaltbar ist, und dieser Nachweis dürfte geleistet sein.

III. DAS JAHR

Schon in der ersten Auflage hatte Fließ dem Jahr eine gewisse Bedeutung im biologischen Geschehen zugewiesen. In der zweiten Auflage spielt das Jahr eine noch größere Rolle, und es sind vor allem eine Reihe von Beispielen durch Einführung des Jahres vereinfacht worden.

Daß das Jahr im biologischen Geschehen eine gewisse Rolle spielt, wird niemand bezweifeln, und diese Tatsache ist auch von jeher in verschiedenartigster Weise anerkannt worden. Fließ geht aber auch hier wieder viel zu weit, wenn er auf Grund einiger weniger frappanter Beispiele glaubt, dem Jahr die Rolle zuschreiben zu dürfen, die es in seinen Formeln spielt.

Es würde viel zu weit führen, wollten wir in der Kritik der Fließschen Konstruktionen in alle Einzelheiten gehen. Die Jahresperioden sind in seinen Berechnungen oft so innig mit den andern Perioden verknüpft, daß man den Eindruck hat, Fließ wiederhole mit der Periode von 365 Tagen das Spiel wie mit den Perioden von 23 und 28 Tagen, ohne daß er damit einen kritischen Leser von der Richtigkeit seiner sehr weitgehenden Behauptungen zu überzeugen vermöchte. Daß auch hier die Äquivalenzbeziehungen eine große Rolle spielen, ist nicht verwunderlich. So sind nach Fließ

$$23^2 \mid = \mid 3/2 \text{ Jahre} \quad (2. \text{ A.}, \text{ S. } 186)$$

$$\frac{23 \cdot 28}{2} \mid = \mid 1 \text{ Jahr} \quad (1. \text{ c. S. } 187)$$

$$28^2/4 \mid = \mid 1/2 \text{ Jahr} \quad (1. \text{ c. S. } 193)$$

Der erste Wert ergibt für das ganze Jahr $352\frac{1}{2}$ Tage, der zweite 322 Tage und der letzte 392 Tage.

Wir müssen unbedingt neben dem tropischen und dem siderischen Jahr der Astronomen noch das „biologische Jahr“ von Fließ einführen, das man im Gegensatz zu den astronomischen Jahren als das „elastische Jahr“ bezeichnen könnte.

Es ist wohl klar, daß man mit solcher Begriffsjongliererei auf ernsthafte Leser keinen Eindruck machen kann, und daß eine Widerlegung solcher Spielereien eine Zumutung an ihn und den Kritiker wäre.

Um aber auch hier dem Vorwurf auszuweichen, daß sich die Kritik mit billigen allgemeinen Phrasen begnüge und sich hüte, die Sache wirklich zu widerlegen, soll wenigstens an einem Beispiel gezeigt werden, wozu die Methoden von Fließ führen, wenn man sie konsequent anwendet. Ich wähle dazu wieder das Zahlenpaar 3 und 5, über das ich im 1. Kapitel ausführlich geschrieben habe.

Ich will z. B. „beweisen“, daß die „normale“ Schwangerschaftsdauer äquivalent einem Jahr ist, indem ich mich auf die angenommene biologische Äquivalenz von 3 und 5 stütze. Das geschieht folgendermaßen:

Es ist

$$365 = 5 \cdot 73 = 5 \cdot (70 + 3) = 5 \cdot (14 \cdot 5 + 1 \cdot 3)$$

Der Ausdruck in der letzten Klammer ist äquivalent 15 biologischen Einheiten und es ist offenbar (!) auch hier kein Zufall, daß es gerade $15 = 3 \cdot 5$ Einheiten sind, d. h. gleich dem Produkt der beiden Periodenzahlen.

Bezeichnen wir eine biologische Einheit mit E , so haben wir die wichtige (!) Beziehung:

$$1 \text{ Jahr} = 5 \cdot 15 E$$

Daraus folgen noch weitere Beziehungen, wenn wir an Stelle des ursprünglichen Wertes von E die ihm äquivalenten setzen, nämlich 3 und $(3 + 5) : 2 = 4$. D. h. wir haben dann

$$1 \text{ Jahr} = 3 \cdot 15 E$$

$$1 \text{ Jahr} = 4 \cdot 15 E$$

Für die Darstellung der Schwangerschaftsdauer kann „offenbar“ nur die letzte Art der Darstellung, das „zwitterige“ Jahr in Frage kommen.

Es beträgt nun die Dauer der normalen Schwangerschaft ca. 280 Tage. Dieser Wert ist nicht genau bekannt. Er kann einige Tage weniger oder mehr betragen. Nehmen wir z. B. 276 Tage. Dann haben wir

$$276 = 4 \cdot 69 = 4 (12 \cdot 5 + 3 \cdot 3) = 4 \cdot 15 E$$

was zu beweisen war!

Auch das ist ein Resultat, das noch niemand gefunden hat und das den Vergleich mit den Fließ'schen Entdeckungen getrost aufnehmen darf.

Auf der andern Seite wird aber auch die Absurdität der „Methode“ von Fließ jedem klar. Daß sie bei Fließ nicht so evident ist, liegt nicht an seiner besseren Logik oder den „besseren“ Zahlen, wie er oder seine Anhänger vielleicht einwenden werden, sondern einfach daran, daß bei den Zahlen 3 und 5, von denen die eine fast doppelt so groß ist wie die andere, das qui pro quo der Aequivalenzbeziehung sich viel deutlicher bemerkbar macht. Man hat die unsinnige Methodik von Fließ gewissermaßen unter die Lupe genommen und damit auch denen evident gemacht, die nicht ohne weiteres in der Lage sind, die Willkürlichkeiten bei Fließ zu erkennen.

Es sind nicht die anderen Zahlen, die den Unsinn zustande gebracht haben, sondern die Art des Denkens, die „Methodik“, wenn man diesen wissenschaftlichen Begriff auf die Spielereien von Fließ anwenden darf, ohne sich lächerlich zu machen.

Ich möchte hier noch ausdrücklich betonen, daß ich bei den Ableitungen noch sehr schonend verfahren bin und mich immer ganz konsequent an die von Fließ benützten und als erlaubt angesehenen Operationen gehalten habe. Man könnte mit Leichtigkeit noch weiter gehen, besonders wenn man in der Darstellung der Zahl 73 auch negative Koeffizienten zulassen würde. Dann gäbe es fast nichts mehr, was man nicht „beweisen“ könnte. Z. B. ließe sich ohne Schwierigkeit beweisen, daß der zwei Jahre alte Urenkel biologisch gleich alt ist, wie der neunzig Jahre alte Urgroßvater. Der Leser mag sich zu seinem Ergötzen an solchen Spielereien versuchen. Mir genügt es, das Unhaltbare in der Methodik von Fließ nach den verschiedensten Richtungen hin nachgewiesen zu haben.

Es wird nicht ganz uninteressant sein, an einigen Beispielen von Anhängern von Fließ zu zeigen, wie sich bei ihnen die Aequivalenzbeziehungen auswirken. Ich entnehme sie dem Anhang des Buches von Pfennig. Man hat z. B. die folgenden Zerlegungen:

$$1 = \frac{\Sigma}{3} + \frac{28}{4} - 23 = 3 - 2 \text{ usw. bes. } 46 - 45, 57 - 56, 70 - 69$$

$$3 = 17 - 14 = \frac{\Sigma}{3} - \frac{28}{2}$$

Als quadratische Formen ferner

$$1 = \frac{28^2}{2} - \frac{\Sigma}{3} \cdot 23$$

$$3 = \frac{3}{2} \cdot 28^2 - 23^2 - 23 \cdot 28$$

In Form von „Halbjahresresten“

$$1 = J - 3 \cdot 23 \cdot 28 + 2 \cdot 88^2 = 183 - \frac{3}{2} \cdot 23 \cdot 28 + 28^2$$

$$2 = 2 \cdot 23 \cdot 28 - 23^2 - \frac{28^2}{2} - J = \frac{23 \cdot 28 + 28^2}{2} - 23^2 - 183$$

Ich denke, das mag genügen. Wer damit nicht zufrieden ist, findet alles, was sein Herz begehren mag, bei Pfennig.

IV. VOM ZUSAMMENHANG DER GENERATIONEN UND DER FAMILIENSUBSTANZ

Neben der rein arithmetischen Beweisführung für seine Theorie findet Fließ noch eine weitere Stütze für sie in dem Umstand, daß bei verschiedenen Gliedern derselben Abstammung, die eventuell an ganz verschiedenen Orten wohnen, resp. sich zu der betreffenden Zeit aufhalten, Erkrankungen oder wenigstens Störungen des Befindens auftreten, die nicht durch Milieueinflüsse erklärbar sind.

Daß solche Dinge beobachtet worden sind, dürfte nach den Zeugnissen verschiedener Autoren als glaubhaft gelten. Häufig sind sie allerdings nicht, und bei scharfer Kritik würde vielleicht der eine oder andere Fall als nicht genügend sicher festgestellt erscheinen. Daß man auch dem rein zufälligen Zusammentreffen eine gewisse Rolle zubilligen muß, sei nur nebenbei bemerkt. Auch ich möchte diesem Umstande keine sehr große Rolle zuschreiben.

Eine Periodizität im Ablaufe der Lebenserscheinungen scheint auf den ersten Blick eine zureichende Erklärung für diese Erscheinung, und Fließ sieht in der Tat in dieser Annahme nicht nur eine Stütze für seine Hypothese eines periodischen Ablaufes der Lebensvorgänge im allgemeinen, sondern seiner ganzen Theorie.

Sieht man aber näher zu, so findet man, daß die Dinge doch nicht so einfach liegen, wie es bei oberflächlicher Betrachtung scheint. Will man nicht ein rein zufälliges Zusammentreffen von kritischen Tagen annehmen, was bei vollständiger Unabhängigkeit der einzelnen Einheiten unabwendbar wäre, so müssen wir wiederum irgendwelche Koppelungen annehmen, ähnlich denen, die wir für das einzelne Individuum als notwendig erkannt hatten (vgl. Kap. V). Damit haben wir dann mit einem Schlage wieder die ganze Reihe von Schwierigkeiten, die wir schon früher hatten und womöglich noch einige dazu. Daß Fließ diese Schwierigkeiten nicht gesehen hat, ist bei seinem typischen Nicht-zu-Ende-denken der Theorien nicht verwunderlich.

Wir haben aber noch mit einer weiteren Schwierigkeit zu rechnen, nämlich dem sehr seltenen Vorkommen solcher Erscheinungen.

Nach den von Fließ gemachten Voraussetzungen müßte man eigentlich erwarten, daß solche Vorkommnisse verhältnismäßig häufig wären, was sicher nicht der Fall ist, denn sonst wären sie nicht von jeher als Curiosa angesehen und registriert worden. Diese Tatsache ließe sich viel eher mit der Annahme in Einklang bringen, daß das Zusammentreffen zufällig ist in dem Sinne, daß zufällig zwei oder mehr Familienglieder sich in einer übereinstimmenden „Phase“ befinden.

In dieser Hinsicht böte tatsächlich die Hypothese von Fließ und zwar die Annahme nicht ganz konstanter Perioden, eine Erklärungsmöglichkeit für eine Erscheinung, für die die heutige Wissenschaft noch keine plausible Erklärung hat. Immerhin wäre die Erklärung nicht gerade sehr gut, und die weitere Analyse der Hypothese würde noch eine Reihe von schwachen Punkten finden, ganz abgesehen davon, daß die Annahme der nicht konstanten Perioden, wie ich zeigen werde, die ganze Theorie von Fließ über den Haufen wirft.

So darf man sich denn wohl mit Recht fragen, ob man einer in den Einzelheiten noch gar nicht erforschten Erscheinung wegen eine so gewagte Hypothese aufstellen und nicht lieber die Sache einstweilen sich selber überlassen soll.

Zum Problem selbst ist zu bemerken, daß die Hypothese von Fließ nicht die einzige Möglichkeit ist, die erwähnte Erscheinung zu „erklären“, wenn wir unter „erklären“ auch die Einordnung in ein System verstehen, dessen Richtigkeit noch nicht feststeht. Ein solches System wäre die Astrologie, die ihrem ganzen Wesen nach keine große Schwierigkeit haben dürfte, solche Koinzidenzen zu „erklären“. Die Methodik von Fließ hat übrigens mit der Astrologie, wenigstens der der kleineren Geister, viel mehr gemeinsam, als man bei der Verschiedenheit des Gegenstandes erwarten würde. Bei Fließ handelt es sich um den rein nachträglichen Nachweis einer gewissen Gesetzmäßigkeit, der sich, wie gezeigt wurde, fast immer erbringen läßt. Auch bei den Astrologen spielt die vaticinatio ex eventu eine sehr große Rolle, und bei dem komplizierten Apparat, der Menge von Möglichkeiten, die in jedem Falle in Betracht kommen, läßt sich auch da meist leicht zeigen, daß ein bestimmtes Ereignis, das zu einer bestimmten Zeit eingetreten ist, nach den astrologischen Regeln zu der betreffenden Zeit eintreten mußte. Indes ist die Astrologie doch im Prinzip wenigstens ein gut Stück näher der Wirklichkeit als die Fließsche Zahlenmystik, da sich tatsächlich in einzelnen Fällen der gewünschte Nachweis ohne weitere

Manipulationen führen läßt. Speziell in dem uns beschäftigenden Falle liegen die Dinge insofern noch besonders günstig für eine astrologische Erklärung, als die Horoskope naher Verwandter, wie schon von Kepler nachdrücklich hervorgehoben wurde, eine oft ziemlich weitgehende Übereinstimmung zeigen, die das gleichzeitige voneinander unabhängige Auftreten durch gewisse gleichartige siderische Einflüsse erklärt. Als wissenschaftliche Erklärung kommt natürlich diese Annahme vorläufig nicht in Betracht.

V. VERTEILUNG DER EREIGNISSE

Wenn Fließ so fest von seiner Theorie der Existenz zweier Perioden der lebendigen Substanz überzeugt war, daß er glaubte, im Prinzip alles zeitliche Geschehen auf sie reduzieren zu können, so hätte er, wenigstens in der 2. Auflage seines Buches, den Versuch einer mathematischen Theorie des biologischen Geschehens machen müssen und sich nicht damit begnügen dürfen, den Zahlen gleichsam nur von außen her beizukommen. Was ich mit dem „von außen“ meine, wird sich bald zeigen. Vor allem hätte er auch die Hypothese der Inkonstanz der Periodenlänge und deren Einfluß auf die Verteilung der Ereignisse genauer untersuchen müssen. Und wenn Fließ als Mediziner dieses Bedürfnis, resp. die Notwendigkeit einer solchen Untersuchung nicht fühlte, so hätten es wenigstens die ihm verbundenen Mathematiker haben sollen. Aber auch sie haben sich mit einer rein interpolatorischen Darstellung der gefundenen oder ad hoc ausgesuchten Zahlen begnügt. Daß damit eine schwere Unterlassungssünde begangen worden ist, wird die folgende Untersuchung zeigen.

Ich will versuchen, die von Fließ und seinen Mitarbeitern gelassene Lücke wenigstens einigermaßen auszufüllen.

Wir wollen annehmen, die von Fließ gefundenen Perioden von 23 und 28 Tagen seien, wie auch Fließ glaubt, von nicht ganz konstanter Länge, sondern schwanken um ihren Mittel- oder Idealwert. Dann handelt es sich darum, festzustellen, welchen Einfluß diese Schwankungen in der Dauer der Perioden auf die Größe der gefundenen Intervalle haben.

Da kommen verschiedene Möglichkeiten in Betracht.

1. Die Schwankungen sind ganz ungesetzmäßig. Es läßt sich auch nicht einmal eine Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung von bestimmter Größe angeben.

Dieser Fall dürfte für eine mathematische Behandlung ausscheiden. Es fragt sich, ob überhaupt irgend etwas Gesetzmäßiges herauskommen könnte. Bleibt also die 2. Möglichkeit:

2. Die Schwankungen sind gesetzmäßig, insofern als einer Abweichung von bestimmter Größe eine bestimmte relative Häufigkeit zukommt, die sich eventuell im Laufe sehr großer Zeiträume auch ändern könnte. Wie diese relative Häufigkeit vom mathematischen Standpunkt aus zu charakterisieren ist, ist für uns gleichgültig. Wichtig dagegen ist die Frage, ob die Längen der Perioden irgendwie voneinander abhängig sind, in dem Sinne, daß eine Art Ausgleich der Fehler stattfindet, oder ob die Abweichungen der einzelnen Perioden voneinander ganz unabhängig sind.

Die erste Annahme würde zu einer sehr komplizierten mathematischen Theorie, wenn nicht gar zu inneren Widersprüchen führen. Auf alle Fälle wären die Annahmen, die zwecks rechnerischer Behandlung des Problems gemacht werden müßten, viel komplizierter als im 2. Falle, den wir unserer Untersuchung zugrundelegen wollen. Will man schon einmal eine inkonstante Länge der Perioden annehmen, so ist die Annahme der Unabhängigkeit der Schwankungen der ganzen Sachlage nach nicht nur die einfachste, sondern auch die natürlichste Hypothese, d. h. diejenige, die mit der Idee der den Perioden zugrundeliegenden Substanzeinheiten am besten harmonieren würde.

Wir setzen also voraus, daß von jedem Zeitpunkt im Leben eines Individuums aus Perioden von einer mittleren Länge von 23 resp. 28 Tagen in beliebiger Anordnung „laufen“. Diese Perioden seien von nicht ganz konstanter Länge und sollen um den Mittelwert so schwanken, daß einer bestimmten Abweichung, einem bestimmten Fehler, wie wir sagen wollen, eine bestimmte relative Häufigkeit zukomme, die wir als die empirische Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers bezeichnen wollen. Die Gesamtheit der Fehler weist dann in bezug auf ihre relative Häufigkeit eine bestimmte Verteilung auf, die wir als das Fehlergesetz bezeichnen wollen. Über dieses Fehlergesetz wissen wir nun nichts. Wir dürfen aber doch annehmen, daß sich die Fehlerfrequenzen ähnlich verteilen, wie sich andere meßbare biologische Merkmale von Individuen verteilen. Insbesondere dürfen wir auch annehmen, daß gleich großen positiven und negativen Fehlern annähernd gleiche Wahrscheinlichkeit zukomme. Ferner noch, daß die Wahrscheinlichkeit eines größeren Fehlers kleiner ist, als die eines kleineren, und daß speziell Abweichungen von einer gewissen Größe ab sehr selten vorkommen.

Dann hat unsere Fehlerfrequenzkurve, oder kurz Fehlerkurve, wenn wir sie auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem beziehen,

die Form eines nach beiden Seiten ziemlich symmetrisch abfallenden Hügels, dessen Gipfel dem Nullpunkte der Abszissenachse entspricht, wenn die Abszisse die Größe des Fehlers, die Ordinate seine Wahrscheinlichkeit angibt. Je steiler die Kurve verläuft, je rascher die beiden Zweige sich der Abszissenachse nähern, um so mehr drängen sich die Fehler um den Nullwert zusammen, d. h. um so häufiger sind die kleinen und sehr kleinen Fehler, und um so weniger weichen die Ereignisdaten, resp. die Intervalle zwischen zwei Ereignissen, von den mittleren Werten ab. Je flacher die Fehlerkurve verläuft, um so gleichmäßiger verteilen sich die Fehler um die Mittelwerte. Im extremen Fall, wo die Fehlerkurve eine Gerade darstellt, gibt es überhaupt keine bevorzugten Werte mehr, und die Werte der tatsächlichen Intervalle haben gar keine Beziehung mehr zu den Mittelwerten, sondern verteilen sich ganz zufällig über die Intervalle.

Sind die Fehler der einzelnen Perioden voneinander unabhängig, so wirkt das Aneinanderlegen einer größeren Zahl von Perioden in dem Sinne, daß die Fehlerkurve der Summe der Intervalle gegenüber der Fehlerkurve einer einzelnen Periode flacher wird, und zwar um so flacher, je größer die Zahl der abgelaufenen Perioden ist. Von einer gewissen Zahl von Perioden ab ist die Periodizität völlig verwischt und selbst eine nachgewiesene Periodizität bietet gar keine Gewähr dafür, daß wir es nicht mit einer reinen Fiktion zu tun haben.

Von den über die Periodenlänge, resp. die Fehler gemachten Annahmen ist für dieses Verhalten allein die Unabhängigkeit der Fehler maßgebend. Die weitere Annahme des symmetrischen Verlaufes der Fehlerkurve ist in dieser Hinsicht ganz überflüssig. Sie kann uns aber dazu dienen, den Anschluß an ein spezielles Fehlergesetz zu finden, das uns erlauben wird, das Geschehen wenigstens in großen Zügen an einem speziellen, besonders einfachen Beispiel rechnerisch zu verfolgen.

Um uns eine gewisse Vorstellung von dem Verlauf des Geschehens zu machen, wollen wir unseren weiteren Betrachtungen ein bestimmtes einfaches Fehlergesetz, das Gauß'sche Fehlergesetz, zugrunde legen. Das Gauß'sche Fehlergesetz resp. die Verteilungskurve spielt bei biologischen Objekten eine so wichtige Rolle, daß man sie früher als die Verteilungskurve schlechthin angesehen hat. Das ist entschieden zu weit gegangen. Aber als erste Annäherung kann sie wahrscheinlich für die Mehrzahl biologischer Verteilungs-

kurven betrachtet werden, und als mathematisches Modell für eine unbekannte Fehlerkurve leistet sie als Grundlage der mathematischen Betrachtung bei vorsichtiger Schlußfolgerung alles, was man vernünftigerweise verlangen kann.

Mathematisch gesprochen ist die Gauß'sche Fehlerkurve durch einen einzigen Parameter charakterisiert, d. h. eine bestimmte Kurve ist schon durch die Angabe eines einzigen charakteristischen Wertes gegeben. Als Parameter oder charakteristischer Wert können wir den mittleren Fehler (m. F.) oder die damit in einfachem Zusammenhang stehende „Präzision“ wählen. Gilt dann das Gauß'sche Gesetz der Fehlerverteilung für die einzelne Periode, so gilt es auch für eine Summe von Perioden, wie in den Lehrbüchern der Fehlertheorie gezeigt wird.

Unangenehm ist allerdings, daß wir gerade über die Größe des charakteristischen Wertes des Fehlergesetzes ganz im unklaren sind. Das ist glücklicherweise nur ein „quantitativer Nachteil“. Die oben für jedes Fehlergesetz gefundenen Eigenschaften gelten natürlich auch für das Gauß'sche Gesetz, und es ist nur der Zeitpunkt, von dem an die gleichmäßige Verteilung der Ereignisse eintritt, verschieden. Je größer der m. F. ist, um so früher tritt diese gleichmäßige Verteilung ein, und um so unzuverlässiger sind schon die Berechnungen, die sich auch nur auf eine kleine Anzahl von abgelaufenen Perioden stützen, während bei einem kleineren m. F. sich die Störung erst nach einer größeren Anzahl von abgelaufenen Perioden bemerkbar macht. Ein prinzipieller Gegensatz liegt also durchaus nicht vor.

Nehmen wir z. B., um eine bestimmte Vorstellung zu haben, an, der m. F. betrage 12 Stunden. Das wäre für eine biologische Konstante, die gewissermaßen als Fundamentalprinzip allem Lebendigen zugrundeliegt, keine große Schwankung. Man würde sogar im Vergleich zu anderen biologischen Konstanten von hervorragender Stabilität dieses Wertes sprechen können. Wir können aber auch annehmen, daß der m. F. nur 6 Stunden betrage oder irgend einen anderen Wert habe; denn es kommt wie gesagt nicht auf den Wert des m. F. an, sondern nur darauf, daß die Länge der Perioden nicht absolut konstant ist.

Bei dem Gauß'schen Gesetz ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein unbekannter Fehler im konkreten Falle dem absoluten Werte nach innerhalb des m. F. liegt, gleich 0,68. Es liegen also ca. $\frac{2}{3}$ der Fehler innerhalb des Bereiches eines halben Tages und nur

ca. $\frac{1}{3}$ geht darüber hinaus. Ist der m. F. einer Periode 6 Stunden, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler kleiner als ein halber Tag sei, 0,95.

Nehmen wir nun an, daß von einem bestimmten Zeitpunkt an m Perioden zu 23 und n Perioden zu 28 Tagen abgelaufen seien, im ganzen also $(m + n)$ Perioden. Dann ist der m. F. nach der Theorie gleich dem $\sqrt{m + n}$ -fachen des m. F. und kann daher ganz beträchtliche Werte erreichen. Er kann schließlich sogar ein Mehrfaches der Periodenlänge betragen, womit selbstverständlich jede Periodizität verwischt ist. Sei der m. F. einer Periode = μ , so erreicht er den Wert von n Tagen nach Ablauf von s Perioden. Man hat dann für s die Gleichung

$$\begin{aligned} \mu\sqrt{s} &= n \\ s &= n^2/\mu^2 \end{aligned}$$

Wichtig ist, daß der m. F. besonders am Anfang verhältnismäßig rasch wächst; er ist nach Ablauf von 2, 3, 4 Perioden das 1,4-, 1,7- resp. 2-fache des ursprünglichen m. F.

Hätte man nur eine einzige Periode, so ließe sich leicht zeigen, daß nach Ablauf einer größeren Anzahl von Perioden die Verteilung der Ereignisse ganz zufällig wird. Da sich aber jede Zahl aus 23 und 28 zusammensetzen läßt, versagt dieses Kriterium. Dafür hat man aber andererseits gar keine Gewähr dafür, daß man die wahre Zerlegung gefunden habe, selbst wenn eine solche existierte. Darüber haben sich weder Fließ noch seine Anhänger je Gedanken gemacht. Das Problem ist ihnen offenbar gar nicht zum Bewußtsein gekommen. Sie haben sich damit begnügt, irgend eine Zerlegung gefunden zu haben, die ihnen in den Kram paßte.

Wir wollen nun einmal das Beispiel der Familie A. v. Humboldt's unter diesem Gesichtswinkel betrachten und ihm die Fließ'sche Periodenzerlegung zugrundelegen.* Das Ergebnis wäre aber so ziemlich dasselbe, wenn man an Stelle der Fließ'schen Zerlegung irgend eine andere, z. B. eine solche nach mittleren Perioden von ca. 25 Tagen Länge wählen würde.

Die Lebensdauer der einzelnen Familienmitglieder schwankt nach Fließ zwischen 4 Perioden und 1348 Perioden. Wir haben etliche sehr große Werte, nämlich 709, 1183, 898, 1348, 979. Die diesen Werten entsprechenden m. F. sind ca. 27μ , 34μ , 30μ , 37μ , 31μ .

* II. S. 145.

Die Annahme, die tatsächlich gefundenen Werte für die Lebensdauern entsprächen genau den Mittelwerten, muß von vornherein als äußerst unwahrscheinlich bezeichnet werden. Selbst wenn die gefundenen empirischen Werte sich als auf den Tag genau erwiesen, was nach den Ausführungen in Kap. IX, 3 als sehr unwahrscheinlich angesehen werden muß, würde doch die gefundene Zahl aller Wahrscheinlichkeit nach gar nicht den gesuchten Wert, d. h. die de facto abgelaufene Zahl von Perioden darstellen. Auch diese Betrachtung zeigt wiederum, daß der von Fließ unternommene Beweis ein Versuch mit untauglichen Mitteln ist.

Es wäre nunmehr noch kurz zu untersuchen, was eine Zerlegung einer Zahl bedeutet, wenn in dem Ausdruck $m.23 + n.28$ m oder n negativ sind. Nehmen wir an, es sei n negativ. Dann bedeutet dies, daß das Ereignis nicht auf dasjenige bezogen wird, von dem es abgeleitet wurde, sondern auf ein früheres Ereignis, von dem es $m.23$ Tage absteht und von dem das erste $n.28$ Tage absteht. Das ist in zweifacher Hinsicht nicht ganz ohne Bedeutung.

Erstens müßte gezeigt werden, daß zu der betreffenden Zeit wirklich ein Ereignis stattgefunden hat, von dem aus man rechnen darf. Zweitens müssen wir entsprechend der größeren Zahl tatsächlich abgelaufener Perioden mit einem größeren m . F. rechnen, als wenn wir das Intervall in einen Ausdruck mit positivem m und n zerlegen würden.

Vom mathematischen Standpunkt aus ist dieser Punkt zwar nicht sehr wichtig, wohl aber als Zeugnis dafür, mit welcher Sorglosigkeit Fließ seine Zahlen behandelt.

VI. ZUR THEORIE DER AEQUIVALENZ

Die „biologische Aequivalenz“ von 23 und 28 Tagen spielt in der Fließ'schen Theorie eine so wichtige Rolle, daß man sie ohne Übertreibung als den Angelpunkt der ganzen Theorie bezeichnen kann. Es wird sich deshalb empfehlen, den Begriff der Aequivalenz etwas genauer zu untersuchen. Eigentlich hätte man von Fließ verlangen dürfen, daß er, wenigstens in der 2. Auflage, uns eine kurze und klare mathematische Theorie der biologischen Aequivalenzbeziehung gegeben hätte. Eine solche Theorie hätte die Aufgabe, den Begriff der biologischen Aequivalenz zu definieren und ihn vor allen Dingen gegen Aequivalenzen anderer Art scharf abzugrenzen. Daß das dringend nötig ist, wird uns die Untersuchung zeigen, da bereits eine (zahlentheoretische) Aequivalenzbeziehung besteht, die sich mit der Fließ'schen Aequivalenzbeziehung fast ganz deckt.

Nach der begrifflichen Seite haben wir die Aequivalenz von der Gleichheit zu unterscheiden. Wir wollen zwei Denkobjekte als gleich bezeichnen, wenn sie sich in keiner Hinsicht voneinander unterscheiden lassen, so daß also eins das andere in jeder Hinsicht vertreten kann.

Eine vollständige Gleichheit zweier empirisch gegebenen Objekte dürfte wohl überhaupt nicht vorkommen. Man spricht deshalb von Gleichheit zweier Objekte schon dann, wenn sie nur in Hinsicht auf bestimmte Merkmale gleich, d. h. ununterscheidbar sind, einander in gewisser Hinsicht vertreten können. Das ist aber keine Gleichheit im ursprünglichen Sinne mehr, sondern eine Aequivalenz, die demnach als eine partielle Gleichheit definiert werden kann, wobei besonders der Charakter des sich gegenseitig Vertretenkönnens das Maßgebende ist. Auch die Ähnlichkeit z. B. ist eine partielle Gleichheit, die sich aber nicht in so ausgesprochener Weise auf das Einandervertreten erstreckt wie die Aequivalenz.

Das Einandervertretenkönnen kann sich sowohl auf Beziehungen zwischen wirklichen Dingen als auch nur auf Objekte des Denkens beziehen. Für den Fortschritt der Erkenntnis ist namentlich die letztere Möglichkeit von der allergrößten Wichtigkeit, nicht nur

in positiver Hinsicht als Quelle neuer Erkenntnisse, sondern vor allem auch als Quelle von Irrtümern, die daraus entstehen, daß die Äquivalenzbeziehung mehr oder weniger überspannt wird.

Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern.

Vom arithmetischen Standpunkt aus ist jedes Ding jedem anderen äquivalent, wenn es nur als ein Ding aufgefaßt wird und, welches auch seine sonstige Beschaffenheit sei, durch die Zahl 1 repräsentiert wird, die jedem Ding äquivalent ist, es ersetzen kann. Vom geometrischen Standpunkt aus abstrahiert man von allen materiellen Eigenschaften eines Körpers und betrachtet nur seine geometrische Form, so daß in dieser Hinsicht alle Dinge, die innerhalb der zulässigen Abweichungen denselben geometrischen Körper darstellen, äquivalent sind. In den verschiedenen Gebieten der Geometrie werden je nach dem Standpunkte, von dem aus die Gebilde betrachtet werden, ganz verschiedene Gebilde als äquivalent bezeichnet. Zwei Figuren z. B., die für die projektive Geometrie äquivalent sind, sind es für die gewöhnliche Planimetrie nicht. Die Topologie (Analysis situs) endlich faßt den Begriff der Äquivalenz sehr weit und bezeichnet zwei Gebilde schon als äquivalent, wenn sie durch stetige Deformation ineinander übergeführt werden können, so daß z. B. jede einfach geschlossene Figur jeder andern einfach geschlossenen Figur äquivalent ist.

In der Chemie sind unter bestimmten Umständen zwei chemische Atome oder Gruppen von Atomen dann äquivalent, wenn sie die gleiche Anzahl von freien Valenzen haben, d. h. imstande sind, dieselbe Anzahl von einwertigen Atomen oder Radikalen zu binden. Ein Grammolekül (Mol) irgend eines bestimmten Stoffes ist äquivalent einem Grammolekül irgend eines andern Stoffes, sofern man nur die Anzahl der Moleküle in Betracht zieht, was in vielen Fällen das Maßgebende ist.

Die Beispiele ließen sich leicht vermehren. Jeder wird aber aus seinem speziellen Arbeitsgebiet noch welche finden, die ihm zur weiteren Klärung dienen können.

An und für sich ist also die Behauptung von Fließ, daß biologisch, genauer gesagt mit Rücksicht auf den zeitlichen Ablauf des Lebens, 23 Tage äquivalent seien 28 Tagen, nicht ohne weiteres unsinnig. Fließ hat ja auch, um auszudrücken, daß es sich nicht um eine gewöhnliche Gleichheit im arithmetischen Sinne handelt, das Gleichheitszeichen durch ein besonderes Äquivalenzzeichen (\equiv) ersetzt. Andererseits folgt aber daraus weiter noch nichts zugunsten der Fließ-

schen Hypothese. Es wäre ganz gut möglich — und ist in diesem speziellen Falle auch so —, daß aus der möglichen Äquivalenz sich durch rein logische Schlüsse Widersprüche mit feststehenden Tatsachen ergeben.

Die Äquivalenz als logische Beziehung zwischen zwei Denkobjekten kann, wie andere logische Beziehungen, logischen oder auch mathematischen Operationen unterworfen werden; d. h. es können gewisse „Schlüsse“ gezogen werden. Je nach der Art der Äquivalenzbeziehung sind dabei die erlaubten Operationen ganz verschieden, und es handelt sich jeweils darum, die für eine bestimmte Äquivalenzbeziehung geltenden Operationen festzulegen. Wir wollen im folgenden als allgemeines Zeichen für die Äquivalenz das Symbol (\equiv) benützen.

Statt den Versuch zu wagen, eine allgemeine Theorie der Äquivalenz aufzustellen, d. h. eine Reihe von Operationen zu finden, die für jede Äquivalenzbeziehung gelten würden, wollen wir eine spezielle Äquivalenzbeziehung etwas genauer studieren, nämlich die zahlentheoretische Kongruenz. Wir fragen vorerst einmal:

Gibt es nicht in der Mathematik eine Art Äquivalenz, derzufolge $23 \equiv 28$ ist? Die Antwort lautet Ja! Es ist dies die sogenannte Kongruenz. Zwei Zahlen heißen nämlich kongruent in bezug auf einen bestimmten Modul, wenn ihre Differenz durch den Modul teilbar ist oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn sie, durch den Modul geteilt, denselben Rest ergeben. Das ist für 23 und 28 in bezug auf den Modul 5 der Fall. Man schreibt die Äquivalenzbeziehung

$$28 \equiv 23 \pmod{5}$$

Aus dieser Äquivalenzbeziehung folgt nun eine ganze Reihe anderer durch rein arithmetische Operationen. So z. B.

$$5 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$14 \equiv 9 \pmod{5}$$

Das sind aber gerade die Äquivalenzbeziehungen, zu denen Fließ auf Grund seiner Theorie kommt. Die erste, daß 5 Tage biologisch äquivalent null Tagen seien, spricht allerdings Fließ selbst nicht aus. Da haben offenbar noch gewisse Hemmungen gewirkt. Hingegen spricht es Pfennig ganz deutlich aus, daß 5 Tage ein biologischer Nullwert seien (l. c. S. 84). Wir wollen die Tragweite dieser Feststellung erst später untersuchen und uns vor-

erst mit der 2. Aequivalenz beschäftigen. Fließ meint nämlich daß, weil 23 nicht durch 2 teilbar sei, die halbe männliche Periode sein müsse

$$23 - 28/2 \mid = \mid 14 \text{ Tage, d. h.} \\ 9 \mid = \mid 14$$

Das ist allerdings ein ganz merkwürdiger Schluß. Näher läge es entschieden anzunehmen, daß es keine halbe männliche Periode gäbe. Aber das paßt Fließ offenbar nicht. So konstruiert er sich denn durch eine ganz merkwürdige Logik eine halbe männliche Periode.

Wie unsinnig eine solche Deduktion ist, braucht eigentlich nicht lange erörtert zu werden. Da sie aber nicht beanstandet, sondern sogar von Mathematikern akzeptiert worden ist, mag der prinzipielle Unsinn an einem passenden Beispiel demonstriert werden:

Chemisch ist ein Mol Calcium äquivalent einem Mol Barium, d. h. wir können unter der Voraussetzung, für die die Aequivalenz gilt, schreiben

$$40 (=) 137$$

Da 137 nicht durch 2 teilbar ist, müßten wir, um die Aequivalenz der halben Mole zu erhalten, auf beiden Seiten ein halbes Mol Calc. = 20 subtrahieren und erhielten

$$20 (=) 117$$

d. h. 20 Gramm Calcium wären chemisch äquivalent 117 Gramm Barium, was natürlich ein Unsinn ist. Der Unsinn ist hier nur deshalb so klar, weil man das Resultat sofort an der Erfahrung prüfen kann und sieht, daß die Deduktion falsch ist. Sie ist aber im Prinzip nicht falscher als die von Fließ bei der halben Periode gemachte; nur hat man dort keine Möglichkeit der Prüfung. Wir haben allerdings gefunden, daß $14 \equiv 9$ ist, aber nicht auf dem Wege, den Fließ gegangen ist, sondern indem wir auf beiden Seiten 14 subtrahierten, was erlaubt ist. Soweit stimmt also die Fließ'sche biologische Aequivalenz mit der zahlentheoretischen Kongruenz überein. Wir werden sehen, daß die Übereinstimmung noch weiter geht. Vorerst aber noch eine kurze Bemerkung über die Bruchteile von Perioden.

Eigentlich ist schon der Umstand, daß Bruchteile von Perioden vorkommen sollen, eine Inkonsequenz; denn die Perioden sollen doch gewissermaßen die elementaren zeitlichen Bausteine im Ablauf

des Lebens sein. Bei der außerordentlichen Willkür, mit der Fließ vorgeht, wird man sich indes nicht wundern, daß er keine Begründung für diesen merkwürdigen Umstand gibt. Er geht sogar noch viel weiter und schreibt ausdrücklich:

„Das Auftreten der Differenz (28—23; Ref.) bedingt aber den weiteren Schluß (!), daß unsere beiden Grundeinheiten erster Dimension aus 28 bzw. 23 elementarsten (!) Teilen von je einem Tag Lebenszeit bestehen.“ (Von mir gesperrt. Ref.) (II, S. 123.)

„Spottet seiner selbst und weiß nicht wie!“

Das heißt doch auf deutsch, daß der Tag die Elementareinheit des biologischen Geschehens sei. Darüber helfen alle Spitzfindigkeiten mit „Bindungen“ usw. nicht hinweg.

Das ist übrigens auch in den folgenden Worten implicite zugegeben:

„Denn eine Tageseinheit ist einer anderen Tageseinheit wirklich gleich.“ (II, S. 123.)

Das „wirklich gleich“ bildet den Gegensatz von „biologisch gleich“, d. h. der Aequivalenz. Es gibt also auch für Fließ zwei Arten von Gleichheit und man müßte wissen, wann man die eine und wann die andere zur Erklärung eines Zahlenwertes heranzuziehen hat. Fließ spricht sich darüber nicht aus. Aus seinen Rechnungen geht aber ziemlich klar hervor, daß er die „wirkliche“ Gleichheit dann anwendet, wenn die Sache an sich schon klappt; wenn wir z. B. für zwei Intervalle haben $n \cdot 28 = n \cdot 28$. Hier besteht kein Grund, etwas zu ändern. Sind aber zwei Intervalle nicht gleich im arithmetischen Sinne, so kann man sich auf das Interpretieren verlegen und sehen, ob man keine passende Zerlegung von der Form

$$n \cdot 28 = x \cdot 28 + y \cdot 23$$

findet, oder auch eine kompliziertere Formel. Es muß wirklich schon ganz dumm gehen, wenn man nicht irgend ein Resultat findet, das man deuten und als großartige Entdeckung hinstellen kann.

Auch später schreibt Fließ noch, „wir hätten uns eine männliche Einheit (a) vorzustellen als ein Aggregat (von mir gesperrt; Ref.) von 23 elementarsten Teilen und eine weibliche Einheit (b) als eine Vereinigung (von mir gesperrt; Ref.) von 28 solchen Teilen, denen jeder einen Tag Lebenszeit besitzt.“ (II, S. 123 ff.)

Was dann die Perioden und die daraus abgeleiteten Werte noch für eine Bedeutung haben, ist wohl den wenigsten Lesern klar. Eine annehmbare Deutung ergibt sich nur dann, wenn man voraussetzt, daß zwischen den einzelnen elementarsten Teilen eine gewisse Bindung oder Koppelung besteht in dem Sinne, daß sich gewisse Agglomerate dieser kleinsten Einheiten leichter bilden als andere. Dann tritt aber auch sofort wieder die Frage nach der Art der Bindung auf, sowie die nach der absoluten Konstanz der Lebenszeit der einzelnen Einheiten und die Art einer eventuellen Kompensation bei nicht konstanter Lebensdauer. Alle Schwierigkeiten, die wir im Kapitel über die Verteilung der Ereignisse erwähnt haben, treten dann schon bei den elementarsten Einheiten resp. Perioden auf, und wir müssen auf noch viel größere Abweichungen gefaßt sein, als wenn die Perioden von 23 resp. 28 Tagen die Elementareinheiten sind.

Was soll es aber noch heißen, daß 5 Tage ein „biologischer Nullwert“ seien? Ich kann mir darunter wirklich nichts Vernünftiges vorstellen. Etwa, daß 5 Tage nicht zählen? Ob Fließ, Pfennig und die andern Anhänger der Theorie, wenn sie einmal weit entfernt von jeder zahnärztlichen Hilfe 5 Tage tüchtige Zahnschmerzen hätten, nach Verlauf dieser 5 Tage immer noch mit derselben Emphase behaupten würden, 5 Tage seien ein biologischer Nullwert?? Das ist doch wohl nicht gemeint! Ferner, wenn $5 \equiv 0$, dann müßte auch $n \cdot 5 \equiv n \cdot 0 \equiv 0$ sein! Man könnte dann von jedem zeitlichen Intervall im Leben eines Menschen, eines Tieres oder einer Pflanze beliebig viele Vielfache von 5 Tagen subtrahieren und hätte sich nur um den Rest zu kümmern! Oder wenn nicht, warum nicht? Warum folgt aus

nicht
$$\begin{array}{l} 5 \equiv 0 \\ n \cdot 5 \equiv 0? \end{array}$$

Fließ unterwirft doch seine Äquivalenzbeziehung einer ganzen Reihe von arithmetischen Operationen und nimmt für das Resultat Gültigkeit in Anspruch. Er weiß nur nicht recht, was er eigentlich tut, denn sonst hätte er klarer formuliert, was man tun darf und was nicht. Ich sehe wirklich nicht ein, warum man die Operationen machen darf, die Fließ mit seinen Zahlen vornimmt, aber die eben erwähnte nicht. In der Kongruenz darf man das in der Tat machen, und es besteht die Beziehung

$$n \cdot 5 \equiv 0 \pmod{5}$$

Hier hätten wir einen Unterschied der biologischen Äquivalenz gegenüber der Kongruenz. Wir möchten allerdings auch wissen, warum hier die Übereinstimmung auf einmal abbricht und können uns natürlich nicht mit der Versicherung begnügen, daß es halt so sei. Vom mathematischen Standpunkt aus kann man sich fragen, ob eine Äquivalenzbeziehung, die so viele Eigenschaften mit der Kongruenz gemein hat, nicht überhaupt eine Kongruenz ist, d. h. ob sie nicht schon durch diese Übereinstimmung in einigen Merkmalen völlig determiniert ist, wie ja z. B. zwei Dreiecke, die in 3 Stücken übereinstimmen, von einigen besonderen Fällen abgesehen, auch in den übrigen Stücken übereinstimmen, d. h. kongruent sind (im geometrischen Sinne).

Fast alle Operationen, die Fließ an seinen Äquivalenzbeziehungen vornimmt, sind, mathematisch gesprochen, Operationen an Kongruenzen. Aber Fließ geht nicht so weit wie der Mathematiker in der Behandlung der Kongruenzen, sondern bleibt auf halbem Wege stehen. Hätte er für seine Operationen eine richtige, ausgebaute Theorie aufgestellt, so hätte er bald gesehen, daß er sich selbst ad absurdum führt. Eine Theorie aber, die bei logischer Weiterführung ad absurdum führt, ist – absurd. Das ist ja die berühmte „reductio ad absurdum“ zur Widerlegung einer Behauptung.

Fließ geht aber noch weiter und stellt Einheiten höherer Dimension auf, nämlich 2. Dimension, repräsentiert durch die Werte 23^2 , $23 \cdot 28$ und 28^2 . Ferner die 3. Potenzen von 23 und 28 und die ihnen äquivalenten Werte und Polynome aus allen diesen Werten. Soweit es sich um reine Zahlen handelt, ist damit nur eine Erweiterung der Darstellungsmittel erreicht, die eine ganz außerordentliche Anpassungsfähigkeit hat.

Das ist aber nicht das, was Fließ meint. Es sollen ja „Einheiten höherer Dimension“ sein. Was das bedeutet, weiß ich wiederum nicht. Mathematisch gesprochen müßte man ein Quadrat mit den Seiten 23 resp. 28 Tagen oder ein Rechteck mit den Seiten 23 und 28 Tagen haben und Entsprechendes für die Einheiten dritter Dimension.

Es würde sich also um zwei- und dreidimensionale Zeitgebilde handeln. Was man mit solchen Monstren anfangen soll, weiß wohl Fließ selbst nicht. Jedenfalls ist die Zeitauffassung, zu der die Relativitätstheorie kommt, eine harmlose Neuerung gegenüber diesen Konstruktionen.

Einen einigermaßen verständlichen Sinn kann man nur dann in dem Ganzen finden, wenn man diese „Einheiten“ wiederum als

irgendwie gekoppelte Einheiten von elementarsten Einheiten, i. e. Tagen auffaßt, womit man aber auch das absolut Überflüssige dieser neuen Einheiten dartut, sofern es sich nicht darum handelt, für die Interpretationen einen möglichst großen Spielraum zu haben.

Es ist immer wieder dieselbe Geschichte: nirgends klare, scharf umrissene Vorstellungen. Wohin die kritische Sonde dringt, stößt sie auf faules Zeug.

Die Inkonsequenz, das Nicht-zu-Ende-führen von Gedankengängen ist eines der charakteristischen Merkmale des Fließ'schen Buches. Man mag daraus ermessen, was von der in der Einleitung zu beiden Auflagen gedruckten Behauptung zu halten ist, die Theorie sei durch keine Hypothesen belastet, sondern „nur mit den Mitteln der exaktesten mathematischen Analyse“ durchgeführt.

VII. ANALYSE DER EINWÄNDE

Die Fließ'sche Theorie kann, wie in den vorangehenden Kapiteln gezeigt worden ist, von verschiedenen Standpunkten aus widerlegt werden. Es wird sich daher lohnen, die hauptsächlichsten Einwände selbst noch einer kritischen Prüfung zu unterziehen.

Sehen wir von der Unsicherheit eines großen Teiles der Grundlagen ab und beschränken uns auf den prinzipiellen Teil der Widerlegungen, so haben wir drei Punkte, von denen aus die Unhaltbarkeit der Periodenlehre bewiesen werden kann.

Der stärkste Einwand liegt in dem Nachweis, daß Perioden von nicht konstanter Länge auch bei nur kleinen Schwankungen ein ganz anderes Bild gäben, als das von Fließ vorausgesetzte:

Selbst wenn es Perioden im Fließ'schen Sinne gäbe, wäre die Periodizität nach einer größeren Anzahl von abgelaufenen Perioden ganz verwischt, und ein festgestelltes ganzzahliges Vielfaches von 23 oder 28 böte keine Gewähr dafür, daß es nicht ein zufälliges Resultat sei.

Nun haben zwar die Unmöglichkeitsbeweise für die reine Mathematik einen sehr großen Wert; für die angewandte Mathematik möchte ich ihre Bedeutung indes doch erheblich geringer einschätzen. Es bleibt dem Angegriffenen oft noch die Möglichkeit zu behaupten, daß der Hieb zwar gut gezielt und gut geführt sei, aber dennoch daneben getroffen habe. Fließ könnte noch einwenden, daß die meinen Überlegungen zugrundeliegende Voraussetzung gar nicht seine Perioden treffe, sondern etwas ganz anderes, und daß folglich die ganze Beweisführung verfehlt sei.

Diesen Einwand können wir theoretisch ruhig zugeben. In praxi wird er kaum zutreffen. Denn wenn Fließ die von mir angenommenen Perioden ablehnt, für die eigentlich vieles aus seinen eigenen Darstellungen spricht, ganz abgesehen von der Tatsache, daß es absolut konstante Größen im biologischen Geschehen nicht gibt, so ist er verpflichtet, die Elemente, aus denen er seine Theorie aufbaut, genau zu definieren, womit dann die Möglichkeit einer mathematischen Behandlung gegeben ist.

Lehnt man Perioden von nicht konstanter Dauer und voneinander unabhängigen Schwankungen ab, so bleiben nur noch Perioden von ganz konstanter Länge oder solche von nicht konstanter Länge, wo aber irgend eine Abhängigkeit zwischen den einzelnen Periodenlängen besteht. Beide Annahmen wären nicht leicht logisch einwandfrei durchzuführen.

Der zweite Einwand* ist zwar methodisch weniger stark und trifft nicht die Theorie als solche, sondern die einzelnen Beispiele. Praktisch indes kommt ihm eine nicht zu unterschätzende Bedeutung zu, denn der Autor hat für jedes einzelne Beispiel den Nachweis zu liefern, daß das gefundene Intervall wirklich genau in dem früher definierten Sinne ist.

Der dritte Einwand ist der, der von der Kritik bis jetzt einzig gemacht worden ist, nämlich daß es möglich sei, die Fließ'schen Resultate auch mit andern Zahlen zu erhalten. Dieser Einwand war allerdings nur in allgemeiner Form gemacht worden, und die paar Versuche, die den Beweis wenigstens an einigen Beispielen leisten sollten, sind mißglückt, wie Fließ und seine Anhänger triumphierend festgestellt haben. Fließ sieht darin seine Behauptung, daß es nicht möglich sei, seine Resultate auch mit andern Zahlen zu erhalten, glänzend bestätigt. Er übersieht dabei nur, daß er für den Beweis zu viel verlangt, nämlich daß man genau das Gleiche mache wie er.

Nun ist hier zum ersten Male an einer Reihe von Beispielen, darunter an einem, das von Fließ geradezu als beweisend für, resp. gegen seine Theorie angesehen wird, gezeigt worden, daß man das von Fließ Verlangte wirklich auch mit andern Zahlen erreichen kann. Daß ich nicht alle Beispiele umgerechnet habe, wird der Leser verstehen. Es wird wahrscheinlich nicht gelingen, in allen Fällen eine Darstellung durch die Zahlen 3 und 5 zu finden, die formell der Fließ'schen äquivalent ist. Kann man aber mit einem andern Zahlenpaar ein System aufstellen, dessen innere Evidenz ebensogroß ist, wie die des Fließ'schen, so steht Behauptung gegen Behauptung, und dabei bleibt es, da gar keine Möglichkeit einer Kontrolle an der Erfahrung besteht.

Die andern Einwände, die noch zu machen waren, lassen sich nicht so leicht auf eine einfache logische Form bringen. Da ist vor allem der Nachweis, daß die Fließ'sche biologische Aequivalenz nicht scharf von der zahlentheoretischen Kongruenz geschieden ist,

* Vgl. IX, 3.

vielleicht sogar durch die von Fließ aus seinen Operationen sich ergebenden Voraussetzungen schon als Kongruenz festgelegt ist, die aber nicht konsequent durchgeführt ist und möglicherweise sogar zu inneren Widersprüchen führt.

In dieser Beziehung ist namentlich der Hinweis interessant, daß man aus der Aequivalenz von 3 und 5 unter Benutzung von Fließ'schen Operationen zu einem Resultat kommt, das man auf Grund der Kongruenz nicht erhalten könnte.

Dazu kommt noch, daß die Aequivalenzbeziehung eine solche Fülle von Möglichkeiten schafft, daß man bei genügender Beherrschung der Technik wenn nicht alles, so doch fast alles beweisen kann. Nimmt man noch dazu, daß die Beispiele nicht ganz beliebig gewählt sind, sondern daß wahrscheinlich eine gewisse Auslese stattgefunden hat, insofern als Beispiele, die nicht gut paßten, nicht aufgenommen wurden, so wird der Eindruck noch verstärkt. Das gilt namentlich von den Beispielen, die Fließ von Lesern seines Buches zugeschickt wurden, die seine Theorie in der eigenen Familie, womöglich sogar im eigenen Leben „bestätigt“ fanden.

Doch möchte ich auf diesen letzteren Umstand nicht zu großes Gewicht legen. Fließ weist ja mit Stolz darauf hin, daß er mit Beispielen fertig wird, die, auf den ersten Blick und für einen Ungeübten, sich seiner Theorie nicht zu fügen scheinen. Die Hauptsache scheint mir die außerordentlich große Anzahl von Möglichkeiten zu sein, die die Aequivalenzbeziehung eröffnet.

Hätte Fließ, wie es ein Mathematiker tun würde, seine Aequivalenzbeziehung scharf – im mathematischen Sinne – definiert, so wäre es jedenfalls für einen Mathematiker nicht schwer, aus dieser Definition das abzuleiten, was ich oben mehr gefühlsmäßig und empirisch behauptet habe: daß es möglich sei, fast alles zu beweisen. Mir scheint, daß die Theorie durch die bis dahin vorgebrachten Einwände als widerlegt gelten darf, solange wenigstens, als meine Einwände von den Anhängern von Fließ nicht als unstichhaltig zurückgewiesen werden.

VIII. SCHLUSSBETRACHTUNG UND PSYCHOLOGISCHE WÜRDIGUNG DES FALLES

Der Leser, der die Ausführungen bis hierher verfolgt hat, wird sich fragen, wie es möglich war, daß eine so schlecht fundierte Theorie überhaupt aufgestellt werden, sich so lange halten und sogar noch die Unterstützung von Biologen und Mathematikern finden konnte.

Es hieße die ganze Theorie sehr einseitig verstehen, wollte man sich mit einer rein mathematischen und biologischen Widerlegung begnügen. Es ist im Gegenteil nötig, den Fall auch von der psychologischen Seite her zu betrachten, wobei sich zeigen wird, daß es sich nicht um ein individuelles Ereignis, sondern um eine für eine gewisse Gruppe von Menschen typische Einstellung handelt.

Verfolgen wir die Entwicklung des Systems in ihren großen Linien:

Fließ glaubte bemerkt zu haben, daß gewisse Ereignisse im Leben einzelner Individuen eine Bevorzugung der Intervalle von 23 und 28 Tagen zeigen. Das konnte nach seiner Auffassung nicht bloßer Zufall, sondern mußte gesetzmäßig sein, und es mußte sich lohnen, der Sache weiter nachzuforschen. Dabei ergab sich zunächst, daß die beiden Zahlen nicht die Rolle spielen, die Fließ erwartet hatte.

Nun gab es zwei Möglichkeiten:

1. man nahm an, daß man sich geirrt habe und einem der Zufälle zum Opfer gefallen sei, die sich so häufig ereignen.

2. man nahm an, daß dies nicht möglich sei, genauer gesagt vielleicht, nicht möglich sein könne, und suchte die nicht offen zutage liegende Gesetzmäßigkeit im Verborgenen.

Auch im zweiten Falle waren noch zwei Möglichkeiten offen. Es konnte sich bei den Intervallen von 23 und 28 Tagen um Intervalle handeln, die eine gewisse Bevorzugung gegenüber andern zeigen, d. h. häufiger vorkommen, als dem reinen Zufall entspricht.

Es wäre dann Aufgabe einer statistischen Bearbeitung, das festzustellen und die Rolle, die diese beiden Intervalle spielen, genauer festzulegen.

Das ist nun allerdings nicht gerade sehr viel, besonders für jemand, der glaubt, ein wichtiges biologisches Gesetz gefunden zu haben. Es gibt ja Leute, die nach Schätzen graben und froh sind, wenn sie Regenwürmer finden; aber wer einmal davon überzeugt ist, ein großes Gesetz gefunden zu haben, wird sich nicht mit solchen Regenwürmern begnügen, sondern das Gold tiefer suchen und weitergraben.

So auch Fließ. Er ist von der Wichtigkeit seiner Entdeckung so überzeugt, daß er die nicht offen zutageliegende Gesetzmäßigkeit im Verborgenen sucht und – findet. Wenigstens glaubt er es und seine Anhänger mit ihm.

Wir stoßen hier auf eine wichtige psychologische Tatsache, deren Bedeutung wohl Nietzsche als erster in ihrer ganzen Tragweite erkannt hat, wenn er sagt:

„In jeder Philosophie gibt es einen Punkt, wo die „Überzeugung“ des Philosophen auf die Bühne tritt: oder um es in der Sprache eines alten Mysteriums zu sagen:

adventavit asinus
pulcher et fortissimus.“

(Jenseits von Gut und Böse.)

Die Tatsache nämlich, daß es im Grunde genommen gar kein reines Erkennen gibt, sondern daß auch dort der Wille, sagen wir die Affekte, die ausschlaggebende Rolle spielen.

Diese Einsicht ist der Schlüssel nicht nur für das psychologische Verständnis der Entstehung der Fließ'schen Theorie, sondern für das Verständnis der Entstehung der verschiedensten Systeme und Theorien.

Man wird das Auftreten der Überzeugung bei Fließ wohl in den Moment verlegen dürfen, wo er einsah, daß es auf dem ursprünglich ins Auge gefaßten Wege nicht ging. Mit dem Auftreten der Überzeugung ist aber die Theorie aus dem rein wissenschaftlich logischen Stadium in ein überwissenschaftliches, paralogisches Stadium getreten: die logischen Entwicklungen, die sie stützen sollen, sind im Grunde genommen nur noch Beiwerk, denn die Überzeugung, daß die Theorie richtig ist, ist so stark, daß selbst Argumente, die jeden Außenstehenden von der Unrichtigkeit der Theorie

zu überzeugen vermöchten, auf den Autor keinen Eindruck mehr machen. Die größten Hindernisse werden durch die kühnsten Konstruktionen überwunden, und der Autor verliert alles und jedes Maß für die Wirklichkeit. Die Theorie wird auch nicht mehr an der Wirklichkeit kontrolliert, wozu in den meisten Fällen gar keine Möglichkeit besteht. Was erstrebt und vielfach auch erreicht wird, ist eine gewisse Architektonik, eine Art innerer Evidenz, die sich selbst genügt, etwa so wie ein guter Roman, der auch nicht darnach beurteilt werden darf, ob die Handlung wirklich passiert ist, sondern einzig darnach, ob die Charaktere gut gesehen und konsequent entwickelt sind.

Betrachten wir einmal die Entwicklung der Fließ'schen Theorie unter diesem Gesichtswinkel!

Die Idee an sich ist nicht unlogisch:

Wenn 23 und 28 Tage im biologischen Geschehen eine wichtige Rolle spielen, andererseits aber „reine“ Intervalle, d. h. ganze Vielfache eines der beiden Intervalle nur selten vorkommen, so wäre es möglich, daß „unreine“ Intervalle vorkommen, d. h. daß Intervalle, die auf den ersten Blick gar nichts mit 23 und 28 Tagen zu tun haben, sich eventuell als Summen von reinen Intervallen von 23 und 28 Tagen darstellen lassen.

Diese Idee liegt um so näher, als 28 Tage als Prototyp der Mensesintervalle bekannt ist, und Fließ die 23 Tage als das „männliche Äquivalent“ der 28 Tage auffaßt. Geht man in dem symbolistischen, aber an und für sich noch durchaus berechtigten Gedankengang weiter, so kommt man zum Äquivalenzprinzip, und es ist dann naheliegend, ein gegebenes Intervall in der Form $(m \cdot 23 + n \cdot 28)$ Tage darzustellen und darin $(m + n)$ „Perioden“ zu sehen.

Hier kommt nun aber die große Schwierigkeit, die der mathematisch Gebildete sofort sieht, die aber Fließ offenbar bei seinen ersten Versuchen nicht gekannt hat; daß man nämlich jede Zahl z durch 23 und 28 in der Form darstellen kann

$$z = m \cdot 23 + n \cdot 28$$

wo m und n ganze Zahlen sind.

Ein Mathematiker hätte, an diesem Punkt angelangt, die Untersuchung wohl aufgegeben, und tatsächlich bildet auch der Umstand, daß jede Zahl in der erwähnten Weise dargestellt werden kann, einen sehr schwer wiegenden Einwand gegen die Theorie von Fließ.

Diese Schwierigkeit ist indes nicht ganz unüberwindlich, wenn man sich in der Darstellung gewisse Beschränkungen auferlegt. Ist nämlich ein gegebenes Intervall wirklich als gemischtes Intervall auffaßbar, so müssen die Koeffizienten m und n positiv sein. Und wenn man auch jede Zahl auf unendlich viele Arten durch 23 und 28 darstellen kann, so gibt es doch nur eine beschränkte Zahl von Möglichkeiten der Darstellung mit positiven ganzen Zahlen als Koeffizienten. In vielen Fällen erhält man sogar nur eine einzige Lösung, und diese könnte in der Tat als annehmbare Lösung gelten. Der Aufbau des Zahlenbereiches, der in dieser Weise darstellbar ist, ist indes nicht sehr übersichtlich. Kennt man für einen gegebenen Bereich die Zahlen, die sich auf die gewünschte Weise zerlegen lassen, so kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß eine beliebige Zahl dieses Bereiches sich so zerlegen lasse und hat damit die Möglichkeit, wenigstens bis zu einem gewissen Grade festzustellen, wie weit der Zufall eine Rolle spielen kann. Um eine feinere Beurteilung zu ermöglichen, würde man eventuell den Bereich noch in kleinere Bereiche zerlegen.

Vorausgesetzt ist dabei immer, daß das in Betracht kommende Intervall vom letzten „Ereignis“ ab gerechnet werde. Damit wäre das Problem durch einen Frontalangriff angegangen. Aber Fließ liebt die Frontalangriffe nicht. Ihm liegen die Umgehungen besser. So ist er denn auch hier nicht in Verlegenheit, einen Ausweg zu finden, wenn das auf das letzte Ereignis bezogene Intervall keinen passenden Wert ergibt: er bezieht es einfach auf ein früheres Ereignis. In einzelnen Fällen vermag er dafür eine Begründung zu geben, indem er „gleichartige“ Ereignisse aufeinander bezieht, ohne sich allerdings darüber Rechenschaft zu geben, daß diese neue Bedingung das System kompliziert und daß ihr in der Theorie Rechnung getragen werden müßte.

Mathematisch gesprochen kommt das darauf hinaus, daß man die Wahrscheinlichkeit eines rein zufälligen Zusammentreffens unter Umständen nicht unbedeutend erhöht. Ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, daß eine aus dem betreffenden Bereich beliebig herausgegriffene Zahl zerlegt werden könne p , die Wahrscheinlichkeit, daß dies nicht möglich sei q , so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zerlegung möglich sei, wenn man n vorangehende Ereignisse zur Verfügung hat und die Wahrscheinlichkeit bezüglich jedes derselben gleich p ist:

$$w = 1 - q^n$$

Die Beweiskraft einer bestimmten Zerlegung wird also um so kleiner, je mehr Ereignisse man in Betracht ziehen kann.

Aber Fließ begnügt sich selbst nicht mit diesen weiteren Möglichkeiten, wo der Mathematiker noch einigermaßen eine Kontrolle hat. Er steigt zu immer höheren „Dimensionen“ auf und kompliziert seine Theorie immer mehr. Damit geht er den Weg, den noch jeder Urheber einer Theorie gegangen ist, die für das in Betracht kommende Gebiet nicht umfassend genug war. Es braucht nur an Newton erinnert zu werden, dessen Theorie für gewisse einfache optische Phänomene eine „passende“ Erklärung gab, gegenüber anderen aber versagte, jedoch durch Hinzunahme von weiteren ziemlich komplizierten Hypothesen doch noch etwas leistete, wenn auch nicht das, was die Huyghen'sche Wellentheorie ohne weiteres vermochte.

Diese psychische Einstellung des Urhebers seinem Geistesprodukt gegenüber ist geradezu typisch für gewisse „Erfinder“, z. B. der Erfinder des Perpetuum mobile oder von Systemen, um bei Glücksspielen zu gewinnen usw. Hier wie dort handelt es sich um Probleme, die nicht gelöst werden können. Für das Perpetuum mobile kann das als durch Erfahrung und Theorie gesichert gelten, und auch für die Glücksspiele (besonders die Roulette) gilt dasselbe, sofern wenigstens die tatsächlichen Bedingungen des Spiels den von der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemachten Voraussetzungen entsprechen, was nicht bei allen Roulettes der Fall ist. Gerade deshalb tritt aber das Typische des Gedankenganges bei beiden noch viel deutlicher in Erscheinung als bei Fließ, wo man nicht von vornherein behaupten kann, es handle sich um ein unlösbares Problem.

Der Erfinder des Perpetuum mobile weiß, daß er mit einfachen Maschinen nicht zum Ziele kommt. Er nimmt deshalb zu immer komplizierteren Konstruktionen seine Zuflucht, ohne sich darüber Rechenschaft zu geben, daß dadurch im Prinzip nichts geändert, die Sache im Gegenteil nur verschlimmert wird. Daher auch das typische Nie-fertig-werden der betreffenden Maschinen; denn die fertige Maschine würde eine Kontrolle an der Erfahrung erlauben, die sich ganz entschieden in negativem Sinne äußern würde.

Noch charakteristischer kommen diese Dinge bei dem Systemspieler zum Ausdruck. Er hat in seinem Beobachtungsmaterial gewisse „Gesetzmäßigkeiten“ beobachtet, die er verallgemeinern zu dürfen glaubt. Die Erfahrung lehrt ihn aber bald, daß er, sowie er

mit der Realität in Kontakt kommt, Schiffbruch leidet, was die Wahrscheinlichkeitsrechnung ihm zum voraus sagen könnte. Aber er glaubt an die prinzipielle Richtigkeit seines Systems. Nur ist es „zu einfach“. Man muß komplizierte Kombinationen machen, die, psychologisch gesprochen, den Vorteil haben, daß sie nicht so übersichtlich sind wie die einfachen Systeme. Hier kommt aber bei der Erprobung des Systems noch oft der Zufall dem Spieler zu Hilfe, indem er ihm einen Gewinn verschafft, wie er jedem Nichtsystemspieler gelegentlich zufallen kann. Der Spieler aber sieht darin einen Beweis für die Richtigkeit seines Systems, bis ihn die fortgesetzte schlechte Erfahrung belehrt, daß es doch nichts damit ist.

Fließ ist nun gerade in der Lage des Systemspielers. Auch ihm kommt der Zufall oft zu Hilfe, da ihm sein Äquivalenzprinzip eine ganz ungeahnte Fülle von Möglichkeiten bietet. Er kommt aber nie in den Fall, sein System wirklich an der Erfahrung zu prüfen. Denn das, was er und seine Anhänger als Prüfung an der Erfahrung ansehen, ist keine solche. Insofern ist er günstiger daran; denn ihm bleibt die endgültige Enttäuschung erspart, zu der übrigens, nebenbei gesagt, auch die Systemspieler und die Erfinder des Perpetuum mobile nicht kommen, da beim Versagen eines bestimmten Systems immer noch die Möglichkeit von Verbesserungen bleibt, die praktisch nie ein Ende erreichen und so die Hoffnung wachhalten.

Im Grunde genommen haben sicher auch die meisten Leser des Buches von Fließ sein System abgelehnt, weil sie die Theorie „zu kompliziert“ fanden und damit instinktiv das fühlten, was ich oben etwas ausführlicher auseinandergesetzt habe. Eine wissenschaftliche Widerlegung kann das allerdings nicht genannt werden, aber es wäre doch unrecht, eine solche Einstellung von vornherein abzulehnen, da schließlich ein gewisses Gefühl dafür, was erlaubt ist und was nicht auch bei einer wissenschaftlichen Beurteilung eine Rolle spielen kann, wenigstens insofern als man einem Wissenschaftler nicht zumuten kann, sich mit etwas abzugeben, das so ganz gegen sein Gefühl geht; es sei denn sehr gut begründet. Gewiß hat eine solche Einstellung ihre Gefahren, da sie sehr leicht dazu dienen kann, etwas Neues einfach deshalb abzulehnen, weil es sich nicht ohne weiteres in unsere gewohnten Anschauungen einordnen läßt. Auf diese Weise sind entschieden schon wichtige Entdeckungen von der Wissenschaft abgelehnt worden, die sie nachher doch anzuerkennen gezwungen war.

Die Annahme, daß das Naturgeschehen durch einfache Zahlen

beherrscht werde, sich durch einfache Gesetzmäßigkeiten darstellen lasse, ist ein tief in der menschlichen Seele liegender Wunsch und hat zu allen Zeiten einzelne Forscher gereizt, diesen Gesetzmäßigkeiten nachzuspüren. Solche Betrachtungen haben schon bei den Pythagoräern eine Rolle gespielt, dann in der Kabbala, und sind auch später immer wieder aufgetreten. Die moderne Wissenschaft steht ihnen ablehnend gegenüber, da sie ihrer ganzen Betrachtungsart zuwidergehen.

Der letzte Versuch eines Vertreters der Wissenschaft, wenigstens auf einem beschränkten Gebiete gewisse Zusammenhänge durch einfache Gesetzmäßigkeiten im Sinne der Pythagoräer darzustellen, stammt von Joh. Kepler. Sein „Mysterium cosmographicum“ findet sich im 1. Bande der gesammelten Werke und ist jetzt in einer von M. Caspar herausgegebenen deutschen Übersetzung jedermann leicht zugänglich.

Wie hoch Kepler sein astronomisches Erstlingswerk schätzte, geht deutlich daraus hervor, daß er es 25 Jahre später, nachdem er bereits seine bedeutendsten Entdeckungen gemacht hatte, nochmals, mit Anmerkungen versehen, herausgab. Es kann sich also nicht nur um ein Werk des jungen, mystischen Gedanken holden Kepler handeln, die der reife Mann ablehnt. Dafür spricht auch die Bemerkung Laplace's über Kepler:

„Es ist niederdrückend für den menschlichen Geist, sehen zu müssen, wie dieser große Mann sich mit Entzücken bei seinen chimärischen Spekulationen aufhält und sie als die Seele und das Leben der Astronomie betrachtet.“

Es ist nun äußerst lehrreich, das Vorgehen von Kepler und Fließ auf Gebieten zu verfolgen, die eine große innere Verwandtschaft haben. Da finden wir bei Kepler eine absolut klare, auf einer scharf formulierten geometrischen Basis sich aufbauende Entwicklung, die sich immer wieder an den Tatsachen orientiert und eventuelle Diskrepanzen nicht zu verschleiern sucht, sondern eine Erklärung im Sinne der damaligen Zeit gibt, wonach auch Gott über gewisse mathematische Hindernisse nicht hinweggekommen sei. Dabei weise Beschränkung auf ein scharf umschriebenes Gebiet.

Bei Fließ überall das Gegenteil und zwar in ausgesprochenem Gegensatz zu der am Anfange des Buches formulierten Behauptung, daß alles ohne Hypothesen, nur mit den Mitteln der exaktesten mathematischen Analyse abgeleitet werde. Vor allem fehlt jede Möglichkeit einer objektiven Prüfung der Rich-

tigkeit der Resultate. Es wäre auch schwierig, zu denken, wie eine solche Prüfung sich gestalten sollte. An die Stelle einer objektiven kritischen Prüfung tritt eine innere Evidenz, mit der sich alles, d. h. in Wahrheit gar nichts beweisen läßt. Dabei dehnt sich der Anwendungsbereich ins Uferlose.

Bei Kepler hat der Leser das Gefühl, in einen hohen gotischen Dom zu treten, an dessen wunderbarer Architektur sich Auge und Geist erfreuen können, auch wenn er die Idee des christlichen Gottes, der gewissermaßen den gedanklichen Inhalt des Bauwerkes bildet, ablehnt. Bei Fließ dagegen hat man das ebenso unangenehme, wie bestimmte Gefühl, in einer Rumpelkammer zu sein, wo man Schritt für Schritt über irgend etwas stolpert, ohne zu wissen was es eigentlich ist. Bei Kepler kann man von einer Mystik im guten Sinne reden, bei Fließ ist es eine verballhornte, ad absurdum getriebene Mystik, und dem Mystiker Kepler steht der Mystikaster Fließ gegenüber.

Wer die große mystische Woge, die sich seit dem Kriege über ganz Europa, vor allem aber über Deutschland ergossen hat, nur einigermaßen psychologisch versteht, wird sich nicht wundern, daß auch die Zahlenmystik wieder auflebt, und daß uns die neueste Zeit ein Werk beschert hat, das noch weit über Fließ hinausgeht. Ich meine das Buch von Dr. F. Nætling: „Die kosmischen Zahlen der Cheopspyramide“, das in diesem Zusammenhang noch eine kurze Erwähnung verdient.

Der Verfasser leitet aus gewissen Maßen der Cheopspyramide, genauer gesagt aus den Maßzahlen der drei Dimensionen der in der sogenannten Königskammer stehenden Steintruhe, nichts weniger als den „Aufbau des Weltalls“ ab.

Daß die Erbauer der Pyramide in deren Maßen gewisse wichtige, auf unser Sonnensystem bezügliche Zahlen, vielleicht auch gewisse geometrische Größen verewigen wollten, ist schon möglich. Ich möchte mir als Nichtfachmann in dieser Richtung kein Urteil erlauben. Aber die Art und Weise, wie Nætling aus einigen, nicht einmal sicheren Maßzahlen durch fast endlose Rechnungen so ziemlich alle seiner Ansicht nach wichtigen Größen unserer Erde und des Sonnensystems ableitet, die Atomgewichte der Elemente sowohl wie die Umlaufzeiten der Planeten und die Dauer der menschlichen Schwangerschaft, gibt der „Theorie“ den typischen Charakter einer überwertigen Idee.

Wie es kommt, daß der Verfasser durch seine Theorie eine solche Menge der verschiedensten Größen „zwanglos“ darstellen kann, ist

eine Frage, die den Mathematiker interessiert und die er auch ohne Schwierigkeit wird beantworten können, die uns hier aber nicht weiter beschäftigen soll. Uns interessiert nur die psychologische Seite der Frage. Denn verglichen mit Nøtling ist Fließ der reine Waisenknabe, sowohl was die Kühnheit der Konstruktion als die Größe des Materials betrifft, das verarbeitet wird.

Es ist wirklich eine schlechterdings nicht mehr zu übertreffende Leistung, wenn Nøtling S. 172 feststellt, daß die normale Dauer der menschlichen Schwangerschaft 270 Tage 5 Stunden 8 Minuten 1 Sekunde betrage.

Da kommen wir unexakten Mediziner wirklich nicht mehr mit und wagen kaum noch schüchtern zu fragen, was der Autor denn unter „Dauer der Schwangerschaft“ verstehe, wenn diese Größe bis auf die Sekunde genau angebbar sein soll.

Selbstverständlich spielt auch bei Nøtling die innere Evidenz die Hauptrolle. Irgend welche Prüfung an Tatsachen, die als Verifikation der Theorie gelten könnte, wird nicht geboten, ist auch, ebenso wie bei Fließ, der ganzen Sachlage nach nicht möglich.

Aber das muß ich sagen:

Wenn ich schon einmal ein auf Zahlenmystik aufgebautes System möchte, so würde ich dem Nøtling'schen System den Vorzug geben. Nicht nur daß es viel umfassender ist als das Fließ'sche; auch sein ganzer Aufbau ist viel durchsichtiger und symmetrischer, so daß man ihm trotz aller entschiedensten Ablehnung eine gewisse Bewunderung nicht versagen kann.

Man denke doch nur:

„Jene Formel, aus der wir die Hauptelemente aller Planeten, ihre absolute Entfernung von der Sonne, ihre Umlaufzeit, ihre Bahnlänge, ihre Bahngeschwindigkeit und wahrscheinlich auch ihr spezifisches Gewicht ableiten können, zeigt genau denselben Aufbau wie die allgemeine Formel, aus welcher die menschliche Schwangerschaftsdauer abgeleitet wird - - -.“ I. c. S. 174.

Höher hinauf geht's nicht mehr! Solchen Leistungen gegenüber schrumpft das, was unsere Geistesheroen bis jetzt geleistet haben, zu einem reinen Nichts zusammen. Zur Beurteilung des Falles ist daher nicht mehr der Mathematiker, sondern der - Psychiater zuständig.

Daß in dem Nøtling'schen System auch noch die Fließ'schen Perioden unterkommen, versteht sich wohl von selbst. Der Autor hat für die beiden Perioden eine Formel gefunden, die an Einfach-

heit nichts zu wünschen übrig läßt. Und gründlich, wie er nun einmal ist, gibt er uns die Länge der Perioden auf weniger als Millionstel-Sekunden! So ist z. B. die männliche Periode nach Nøtling:

23 Tage 2 Stunden 7 Minuten 10,566 932 9 Sekunden.

Daß der Autor auch die Quadratur des Zirkels gefunden hat, sei nur nebenbei bemerkt.

In mathematischer Hinsicht bietet das Nøtling'sche Buch materiell nichts Besonderes. Es ließe sich, ganz wie bei Fließ, zeigen, daß die Art der Darstellung eine ganz außerordentliche Biagsamkeit hat, die sich allen möglichen Zahlenwerten anpassen läßt. Irgend etwas Tieferliegendes steckt auch da nicht darin. Um so größer ist das Interesse, das das Buch nach der psychologischen Seite hin bietet. Die überwertige Idee, alle zahlenmäßig erfaßbaren Größen im Weltall durch ein paar Zahlen darstellen zu können, hat bei Nøtling den Gipfel erreicht, ist aber im Grunde nur eine Steigerung der sich bei Fließ zeigenden Tendenz.

IX. MATHEMATISCHER ANHANG

1. Der Modul.

Die Gesamtheit der Zahlen, die man erhält, wenn man in dem Ausdruck ax x alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen läßt, oder, etwas anders ausgedrückt, a beliebig oft zu sich selber addiert und von sich selber subtrahiert, nennt man einen eingliedrigen Modul und bezeichnet ihn durch das Symbol (a) . Summe und Differenz zweier beliebiger Zahlen dieses Moduls gehören ebenfalls dem Modul an.

Als n -gliedriger Modul bezeichnet man die Gesamtheit der Werte, die der Ausdruck

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \dots + a_nx_n \quad (1)$$

annimmt, wenn $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ alle möglichen positiven und negativen ganzzahligen Werte annehmen. Man bezeichnet ihn in abgekürzter Schreibweise durch das Symbol

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Ein Ausdruck von der Form

$$ax + by = (a, b)$$

ist ein zweigliedriger Modul, wozu auch die von Fließ erhaltenen Zerlegungen gehören. Sie gehören dem Modul

$$23a + 28b = (23, 28)$$

an. Auch die Zerlegungen in Polynome 2. und 3. Ordnung lassen sich am einfachsten in Form der Moduln darstellen, denen sie angehören. So z. B. die Darstellung durch ein vollständiges Polynom 2. Ordnung

$$23^2x_1 + 23 \cdot 28x_2 + 28^2x_3 = (23^2, 23 \cdot 28, 28^2)$$

Wichtig für unsere Betrachtungen ist der Umstand, daß sich jeder n -gliedrige Modul auf einen eingliedrigen reduzieren läßt. Das heißt, daß sich alle Zahlen, die sich aus (1) ergeben, als Vielfache einer einzigen Zahl darstellen lassen. Diese Zahl ist der

größte gemeinschaftliche Teiler der Glieder des betreffenden Moduls. Also

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n) = (d)$$

wo d der größte gemeinschaftliche Teiler der a bedeutet.

Umgekehrt läßt sich jede Zahl des Moduls (d) in der Form eines n -gliedrigen Moduls darstellen, wenn d der größte gemeinschaftliche Teiler der a ist. Haben die a keinen größten gemeinschaftlichen Teiler außer der Einheit, so läßt sich jede Zahl in der Form des betreffenden Moduls darstellen.

Daraus folgt die bekannte Tatsache, daß sich jede ganze Zahl z in der Form

$$z = 23x + 28y$$

so darstellen läßt, daß die Koeffizienten x und y ganze Zahlen sind.

Dasselbe gilt auch für die Darstellung in der Form eines vollständigen Polynoms 2. Ordnung, nicht aber aller unvollständigen, da zwei von ihnen 23 oder 28 als größten gemeinschaftlichen Teiler haben.

Um wenigstens einen gewissen Überblick über die Möglichkeiten der Darstellung einer bestimmten Zahl durch die Fließ'schen Zahlen zu erhalten, müßte man wissen, wieviele ganzzahlige positive Lösungen die Gleichung

$$23x + 28y = n \quad (2)$$

zuläßt. Ferner, wieviele Lösungen die Zerlegungen in Polynome 2. und 3. Grades mit positiven Koeffizienten man erhält.

Die Antwort auf die erste Frage läßt sich leicht geben:

Die Anzahl der gesuchten Lösungen von (2) ist gleich $\left\lfloor \frac{n}{23 \cdot 28} \right\rfloor$ oder $\left\lfloor \frac{n}{23 \cdot 28} \right\rfloor + 1$, wo die eckige Klammer die größte in dem Bruch enthaltene ganze Zahl bedeutet.

Für Gleichungen, deren linke Seite mehr als 2 Glieder hat, ist die Frage schwieriger zu beantworten. Es handelt sich da um das sogenannte Problem der „Teilung der Zahlen“, die „partitio numerorum“, oder auch um die Kombinationen von gegebenen Zahlen zu einer bestimmten Summe.

Im Prinzip ist das Problem schon von Euler gelöst worden. Die Ausrechnung ist aber im allgemeinen sehr mühsam. Die Berechnung

gen sind von andern Mathematikern, besonders Sylvester, vereinfacht worden, sind aber immer noch so kompliziert, daß hier nicht darauf eingegangen werden kann. Der Leser findet eine ausführliche Behandlung des Gegenstandes in dem „Lehrbuch der Combinatorik“ von Netto (Teubner, Leipzig).

Wichtig für uns ist nur, daß man, sobald n eine größere Zahl ist, eine ganze Anzahl von Möglichkeiten der Darstellung hat.

2. Die Kongruenz.

Über die zahlentheoretische Kongruenz ist im 6. Kapitel so viel gesagt worden, daß der Leser sich eine ungefähre Vorstellung von deren Wesen machen kann. Hier soll noch Einiges nachgetragen werden, was dort nicht Platz finden konnte, da es etwas mehr mathematische Kenntnisse voraussetzt, als der Biologe gewöhnlich hat.

Für das Rechnen mit Kongruenzen gelten dieselben Regeln wie für das Rechnen mit Gleichungen: man darf zu beiden Seiten des Kongruenzzeichens dieselbe Operation ausführen. Eine Ausnahme macht die Division, die nur unter der Voraussetzung erlaubt ist, daß die Zahl, durch die man dividiert, teilerfremd zum Modul ist. Ist das nicht der Fall, so ändert sich der Modul der Kongruenz, und es folgt aus

$$\begin{aligned} na &\equiv na' \pmod{m} \\ a &\equiv a' \pmod{\frac{m}{(m, n)}} \end{aligned}$$

Ganz allgemein gilt der Satz:

Ist $G(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ eine ganze ganzzahlige rationale Funktion der Unbestimmten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, so folgt aus

$$a_1 \equiv a'_1, a_2 \equiv a'_2, a_3 \equiv a'_3, \dots, a_n \equiv a'_n \pmod{m}$$

allgemein

$$G(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \equiv G(a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_n) \pmod{m}$$

Der Beweis stützt sich darauf, daß eine ganze ganzzahlige rationale Funktion der Größen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ aus diesen durch die Operationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation erhalten wird.

Dieser Hauptsatz aus der Lehre der Kongruenzen zeigt deutlich, welch große Anzahl von Möglichkeiten die Ausnutzung der Kon-

gruenz bietet und damit auch die „biologische Aequivalenz“ von Fließ, die, wie ich gezeigt habe, auf die Benützung von Kongruenzbeziehungen hinausläuft, was bis jetzt wie es scheint nicht nur den Kritikern, sondern auch den Anhängern von Fließ entgangen ist.

Die Frage, ob die Fließ'sche Aequivalenzbeziehung durch die von Fließ gemachten Annahmen wirklich schon als Kongruenz charakterisiert sei, ist nicht so leicht zu entscheiden. Vor allem deshalb nicht, weil Fließ es immer vermeidet, seine Annahmen klar und deutlich zu formulieren. Die „exakteste mathematische Analyse“ erscheint nur einmal im Vorwort; was später kommt, ist ein wildes Drauflosrechnen, aus dem man nur mit Mühe einige begleitende Annahmen herauschälen kann. Es soll aber hier wenigstens noch der Versuch gemacht werden, die Beziehungen der Fließ'schen Aequivalenz zur Kongruenz etwas weiter zu studieren, wenn es auch nicht möglich ist, das Problem ganz zu lösen.

Merkwürdig ist, daß Fließ, der doch in der Erweiterung seiner Aequivalenzbeziehung ziemlich hemmungslos ist, nicht auf den Gedanken kam, sie auch auf negative Zahlen auszudehnen. Vom mathematischen Standpunkt aus wäre diese Erweiterung entschieden sehr naheliegend, da ja ein absoluter Nullpunkt, von dem aus man die Ereignisse datieren müßte, fehlt. Daß die Geburt dafür nicht in Betracht kommt, dürfte für den biologisch Denkenden ziemlich klar sein. Es käme nur der Moment der Entstehung des Individuums, d. h. die Befruchtung des Ovums in Betracht, der ganz unbekannt ist. Aber Fließ rechnet ja weit über das individuelle Leben hinaus, wie er im Kapitel „Die Einheit der Familiensubstanz“ zeigt. Daraus ergibt sich, daß man von irgend einem Ereignispunkt aus nicht nur nach vorwärts, sondern auch nach rückwärts rechnen kann, wie es in der Astronomie üblich ist. Und zwar müßte jedes Ereignis jedem andern gleichberechtigt sein.

Daß $(-23) \equiv (-28)$ ist, wird wohl auch Fließ ohne weiteres zugeben, denn es sagt ja nur, daß ein Ereignis, das 23 Tage vor einem bestimmten, als Ausgangspunkt gewählten Ereignis stattgefunden hat, äquivalent einem andern ist, das 28 Tage vor diesem stattgefunden hat. Das als Ausgangspunkt gewählte Ereignis ist dann eine Art Knotenpunkt, wenn man von einem früheren Ereignis aus nach vorwärts rechnet. Die Ausdehnung der Aequivalenz auf negative Zahlen ist also vollkommen gerechtfertigt und sicher nicht un Zweckmäßig. In erster Instanz besteht sie allerdings nur zwischen positiven Zahlen unter sich und negativen unter sich;

aber die Weiterentwicklung würde unbedingt dazu führen, sie auch auf positive Zahlen einerseits und negative andererseits auszudehnen, d. h. zu untersuchen, welchen positiven Zahlen eine bestimmte negative Zahl äquivalent ist und umgekehrt.

Ist die biologische Äquivalenzbeziehung auch auf negative Zahlen ausgedehnt, so wird es leichter sein, sie gegen die Kongruenz abzugrenzen, die auch noch auf gebrochene Zahlen ausgedehnt wird, was Fließ für seine Äquivalenzbeziehung ausdrücklich ablehnt.

Wenn wir die Kongruenz mit der Fließ'schen biologischen Äquivalenzrelation vergleichen wollen, können wir nicht von der Definition der Kongruenz ausgehen, aus der sich die Kongruenztheorie historisch entwickelt hat und die oben gegeben wurde. Wir müssen feststellen, durch welche andere Bedingungen die Kongruenz festgelegt ist.

Da hat sich nun ergeben, daß die Kongruenz durch 5 Bedingungen bestimmt ist, von denen 3 allgemeinerer Natur sind und sich auf den Bereich, d. h. das Zahlgebiet beziehen, in dem die Relation gilt, während 2 speziellerer Natur sind und die Kongruenz als solche von denjenigen Äquivalenzbeziehungen abgrenzen, denen nur die drei ersten Eigenschaften und eventuell andere, aber von den 2 spezielleren Kongruenzeigenschaften verschiedene zukommen.

Der Bereich, in dem die biologische Äquivalenzrelation gilt, sind die positiven ganzen Zahlen, sofern man sich an das hält, was Fließ in seinen Büchern bietet. Da aber, wie oben gezeigt wurde, nicht nur kein Bedenken sondern sogar ein Bedürfnis vorliegt, die Relation auch auf negative Zahlen auszudehnen, kann man als Bereich die ganzen Zahlen ansehen, womit die Gleichheit der Bereiche für Kongruenz und biologische Äquivalenz hergestellt wäre, wenn man als Bereich der letzteren nur die ganzen Zahlen zuläßt. Sonst wäre der Bereich der biologischen Äquivalenzrelation ein Teil des Bereiches der Kongruenzrelation.

Charakteristisch für eine Äquivalenzrelation ist nun, daß sie aus einer und nur einer Klasseneinteilung des Bereiches entspringt. Unter Klassen verstehen wir Teilmengen des Bereiches (d. h. der Menge der Zahlen), die keine gemeinsamen Elemente haben, so daß also ein Element nur einer einzigen Klasse angehören kann. Für die Kongruenzrelation sind diese Klassen die sogenannten Restklassen, d. i. die Gesamtheit aller Zahlen, die bei Division durch den Modul den gleichen Rest geben. Alle Zahlen einer Rest-

klasse sind einander äquivalent, d. h. kongruent in bezug auf den Modul, der das Einteilungsprinzip darstellt.

Nun findet sich bei Fließ keine solche Klasseneinteilung, und damit scheint schon bewiesen, daß seine Äquivalenzrelation keine Kongruenzrelation ist. So einfach liegen indes die Dinge doch nicht. Wenn auch keine durchgeführte Klasseneinteilung vorliegt, was bei dem gänzlichen Mangel eines systematischen Aufbaues nicht verwunderlich ist, so liegen doch Ansätze zu einer solchen vor. Vergleichen wir einmal die biologische Äquivalenz mit der Kongruenz mod. 5. Diese letztere hat 5 Restklassen, die den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 mod. 5 kongruent sind.

Die grundlegende biologische Äquivalenzbeziehung $28 \equiv 23$ liefert die Restklasse 3, wenn wir sie als Kongruenz auffassen. Ebenso liefert die Äquivalenz der „halben“ Perioden $14 \equiv 9$ die Restklasse 4 bzw. zwei Vertreter davon. Die biologische Äquivalenz von 5 und Null liefert die Nullklasse, d. h. die Zahlen des Moduls 5. Bleiben also noch die Restklassen 1 und 2, für die wir leicht Vertreter finden, wenn wir das Verfahren von Fließ auf bestimmte Zahlen anwenden.

Wenn als Grund für die Existenz einer halben weiblichen Periode die Teilbarkeit von 28 durch 2 angenommen wird, dürfen wir aus der Teilbarkeit der halben Periode durch 2 wiederum auf die Existenz einer halben halben, i. e. einer viertel weiblichen Periode schließen; und derselbe Schluß, der von der halben weiblichen Periode zu ihrem männlichen Äquivalent, d. h. von 14 zu 9 geführt hat, muß auch wieder Geltung haben und wir dürfen demnach schreiben

$$7 \equiv 2$$

Das ist aber dieselbe Relation, zu der wir auf Grund der Kongruenz kommen: Die beiden Zahlen sind Vertreter der Restklasse 2.

Nun bleibt nur noch die Restklasse 1. Zu dieser können wir durch verschiedene Überlegungen kommen. Sehen wir die Teilbarkeit durch 2 als Beweis für die Existenz einer „halben“ Periode an, so muß es eine halbe viertels männliche Periode geben, die gleich einem Tag ist, und man erhält dann durch Subtraktion des Äquivalents von der weiblichen Viertelperiode

$$6 \equiv 1$$

also wiederum die Beziehung, die die Kongruenz liefert. Man braucht aber nicht einmal die Teilbarkeit heranzuziehen, denn es

würde genügen, die Gleichung $1 = 1$ von der Aequivalenz zu subtrahieren, um das Resultat zu erhalten. Vom mathematischen Standpunkt aus wäre dieses Vorgehen sogar richtiger, da die Begründung von Fließ nicht stichhaltig ist.

Damit hätten wir, wenn auch nicht die Existenz von Klassen im Sinne der Kongruenzrelation, doch das Bestehen von gewissen Klassen nachgewiesen und es wäre zu untersuchen, ob nicht andere von Fließ gemachte Annahmen schließlich doch durch rein logische Weiterentwicklung auf die Restklassen der Kongruenzrelation führen.

Ist die Klasseneinteilung gegeben, so entspringt daraus die Aequivalenzrelation, denn es gilt der Satz, daß jede Aequivalenzrelation in einer gegebenen Menge M aus einer und nur einer Klasseneinteilung entspringt.

Wenden wir uns nunmehr noch den beiden speziellen für die Kongruenz charakteristischen Bedingungen zu, nämlich

1. aus $a_1 \equiv a_2$ und $b_1 \equiv b_2$ folgt $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2$
2. aus $a_1 \equiv a_2$ und $b_1 \equiv b_2$ folgt $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2$

Das sind Aequivalenzen, von denen Fließ immer und immer wieder Gebrauch macht, so daß man mit Recht annehmen darf, daß sie für das System der biologischen Aequivalenz erfüllt seien, wenn auch Fließ sie nicht ausdrücklich formuliert hat.

Formulieren wir noch kurz die drei ersten Bedingungen in Worten:

1. Eine Zahl kommt nur in einer Klasse vor.
2. Die Aequivalenzbeziehung ist umkehrbar, d. h. wenn $a \equiv b$, so ist auch $b \equiv a$.
3. Wenn die Zahlen a und b in derselben Klasse sind, und ebenso die Zahlen b und c , so sind auch a und c in derselben Klasse. Auch diese Bedingungen dürfen wohl als für die biologische Aequivalenz geltend angenommen werden.

Aus dieser Gegenüberstellung von Kongruenz und biologischer Aequivalenz folgt, daß die biologische Aequivalenz, sofern sie konsequent durchgeführt wird, mit der Kongruenz identisch ist. Es sei denn, daß sich zu den Bedingungen für die Kongruenzrelation noch einige (mindestens eine) Zusatzbedingungen fügen lassen ohne daß man damit auf Widersprüche stößt. Diese Möglichkeit muß im Prinzip noch offen gelassen werden, obschon es sehr unwahrscheinlich ist, daß sie tatsächlich besteht, vielmehr die biologische Aequivalenz, wie ich in Kap. 6 angenommen, mit der Kongruenz

identisch ist, wenigstens soweit sie logisch widerspruchsfrei durchgeführt ist.

Eine endgültige Entscheidung der Frage ist vielleicht überhaupt unmöglich, weil der unsystematische Aufbau der ganzen Theorie von Fließ für eine diesbezügliche Untersuchung nicht die nötigen Anhaltspunkte liefert.

Daß eine scharfe Untersuchung nötig wäre, ergibt sich auch aus folgendem Beispiel:

Im 1. Kapitel habe ich auf einem Wege, der dem von Fließ begangenen durchaus entspricht, die Aequivalenz von 3, 4 und 5 gefolgert. Das ist nun ein Resultat, zu dem man auf Grund der Kongruenz nicht kommen könnte. Man hat zwar

$$\begin{aligned} 3 &\equiv 5 \pmod{2} \\ 6 &\equiv 8 \pmod{2} \\ 10 &\equiv 8 \pmod{2} \end{aligned}$$

Die Division durch 2 auf beiden Seiten des Kongruenzzeichens ist aber nicht erlaubt, weil 2 nicht teilerfremd zum Modul 2 ist. Damit wäre ein Unterschied gegenüber der Kongruenz gefunden und gezeigt, daß die Aequivalenzbeziehung nicht mit der Kongruenz identisch ist. Die Frage bleibt allerdings noch offen, ob man bei weiterer Entwicklung nicht auf Widersprüche stoße. Fließ könnte allerdings einwenden, daß die von mir in diesem Falle befolgte Methode von ihm nicht gebraucht worden sei. Das würde stimmen, da seine beiden Zahlen mod. 2 inkongruent sind, so daß er gar nicht in Versuchung kommen konnte, eine solche Beziehung aufzustellen. Man wird aber ohne weiteres zugeben, daß diese Methode nicht willkürlicher ist als die von Fließ durchweg befolgte, und Fließ oder seine Anhänger hätten jedenfalls Mühe, einen triftigen Grund anzugeben, warum man nicht so vorgehen dürfe, wie es ihnen auch schwer fallen wird, Gründe für das anzugeben, was sie tun und lassen.

3. Fehlertheoretische Betrachtungen.

Die Daten, die Fließ zur Bestimmung der Größe der Intervalle benutzt, sind im allgemeinen nur auf Tage genau gegeben. Es fragt sich daher, mit welcher Genauigkeit ein durch zwei solche Daten bestimmtes Intervall gegeben ist.

Es ist klar, daß bei rein zufälliger Verteilung der Ereignisse über den ganzen Tag die errechnete Zahl von Tagen nur dann gleich

der wirklichen Zahlen von Tagen ist, wenn die beiden Ereignisse zur selben Tageszeit stattgefunden haben. Ist dies nicht der Fall, so kommt zu der errechneten Zahl von ganzen Tagen noch eine gewisse Zahl von Stunden, die von (-24) bis $(+24)$ Stunden schwanken kann. Wie groß der Fehler im einzelnen Fall ist, wissen wir natürlich nicht. Wir können uns aber fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, daß der Fehler eine bestimmte Größe erreiche oder überschreite. Außerdem aber haben wir in dem sogenannten mittleren Fehler ein gewisses Kriterium für die Zuverlässigkeit der Berechnungen.

Da für die Größe des Fehlers die zwischen den beiden Ereignistagen liegenden vollen Tage keine Rolle spielen, dürfen wir sie weglassen und uns auf den Fall beschränken, daß die Ereignisse an zwei aufeinanderfolgenden Tagen stattgefunden haben, was die graphische Darstellung vereinfacht.

Stellen wir die von einem bestimmten Zeitpunkt an abgelaufene Zeit auf einer Geraden so dar, daß einem bestimmten Punkte derselben, dem Nullpunkte, das Ereignis entspricht, von dem aus wir die Zeit zählen, und setzen überdies für die Zeiteinheit eine bestimmte Längeneinheit fest, so können wir jedem Zeitpunkt einen Punkt auf der Geraden eindeutig zuordnen und umgekehrt. Wir haben eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der „Zeitpunkte“ und der Punkte einer gegebenen Geraden vorgenommen. Diese Gerade nennen wir der Kürze halber die Zeitachse.

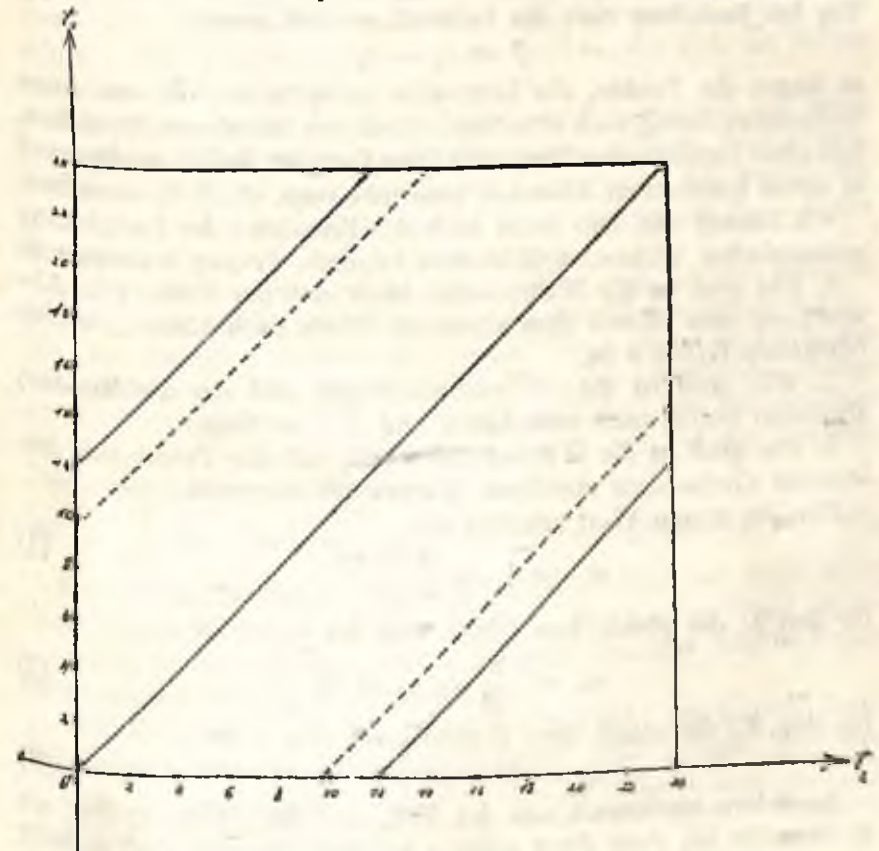
Ordnen wir einem Tage eine Strecke von a Längeneinheiten zu, so ergeben zwei aufeinanderfolgende Tage als Bild eine Strecke von der Länge $2a$ auf der Zeitachse. Und unser Problem ist zurückführbar auf das geometrische Problem der Bestimmung des Abstandes zweier Punkte, von denen der eine ganz beliebig in der ersten Hälfte der Strecke $2a$, also links vom Mittelpunkt, der andere ebenfalls beliebig rechts vom Mittelpunkt liegt.

Uns interessiert besonders die mittlere Entfernung der beiden Punkte, die wir als arithmetisches Mittel einer sehr großen Anzahl von Punktpaaren erhalten würden, theoretisch gesprochen einer unendlich großen Anzahl von Punktpaaren. Statt von der mittleren Entfernung spricht man auch von der wahrscheinlichen Entfernung oder von der mathematischen Erwartung der Entfernung, wobei allerdings zu bemerken ist, daß sich die genannten Begriffe nicht vollständig decken, für unsere Zwecke jedoch als gleichbedeutend angesehen werden können.

Die mittlere Entfernung der beiden Punkte ergibt sich leicht aus der Überlegung, daß eine positive Abweichung von dem Wert a die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, wie eine gleichgroße negative. Es heben sich also bei der Summierung die entgegengesetzten Abweichungen auf, und wir erhalten als Mittelwert für die Entfernung der beiden Punkte den Wert a , d. h. einen Tag, wenn wir wieder auf unser ursprüngliches Problem zurückkommen. Die von Fließ gefundenen Werte sind also Mittelwerte, von denen jeder mit einem Fehler von unbekannter Größe behaftet ist.

Wir wollen nun einige Fehlerbestimmungen vornehmen und die Aufgabe wiederum in ein geometrisches Gewand kleiden, da sie so leichter lösbar ist.

Statt einer einzigen Zeitachse benützen wir jetzt ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen horizontale Achse wir die



t_2 -Achse, dessen vertikale Achse wir die t_1 -Achse nennen wollen. Die Länge von a Einheiten bedeute wieder einen Tag und sei für beide Achsen dieselbe. Dann entspricht dem ersten Ereignis ein Punkt auf der t_1 -Achse, dessen Entfernung vom Nullpunkt zwischen Null und a Einheiten liegt, dem zweiten Ereignis ein Punkt auf der t_2 -Achse in analoger Weise. Errichten wir in den beiden Punkten die Senkrechten auf die betreffenden Achsen, so schneiden sich die beiden Senkrechten in einem Punkt, der ein bestimmtes Intervall darstellt, das sich aus den beiden Strecken t_1 und t_2 , den Koordinaten des Punktes, wie wir nun sagen können, ergibt.

Die Bildpunkte aller möglichen Intervalle erfüllen ein Quadrat von der Seite a . Die Punkte auf der vom Nullpunkt ausgehenden Diagonale des Quadrates entsprechen denjenigen Ereigniskombinationen, wo das Intervall genau gleich a , d. h. gleich einem ganzen Tag ist. Berechnet man das Intervall so, daß immer

$$y = t_2 - t_1$$

so liegen die Punkte, die Intervallen entsprechen, die um einen bestimmten Betrag nach oben resp. unten vom Mittelwert abweichen, je in einer Parallelen zur Diagonale (dem Orte der Nullabweichungen) in einem bestimmten Abstände unterhalb resp. oberhalb derselben.

Wir können nun sehr leicht nach den Prinzipien der Berechnung geometrischer Wahrscheinlichkeiten folgende Fragen beantworten:

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler (die Abweichung vom Mittel) dem absoluten Werte nach kleiner als eine bestimmte Größe x ist.

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler dem absoluten Betrag nach zwischen x und $x + dx$ liegt.

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler eine bestimmte Größe dem absoluten Werte nach übertrifft.

Für den ersten Wert erhalten wir

$$w_1 = 1 - \frac{(a-x)^2}{a^2} \quad (1)$$

für den 2., der gleich dem Differential des ersten ist

$$w_2 = \frac{2}{a^2} (a-x) dx \quad (2)$$

für den 3., der gleich dem Komplement des 1. ist

$$w_3 = (a-x)^2/a^2 \quad (3)$$

Besonders interessiert uns der Fall, daß der Fehler größer als 12 Stunden ist, denn dann müssen wir bei Ab- resp. Aufrundung

auf ganze Tage einen Tag weniger resp. einen mehr in Rechnung setzen als die Rechnung ergeben hat. Wir finden dafür aus (3)

$$w = 1/4^*$$

Eine gewisse allgemeine Orientierung über die Genauigkeit einer mit einem unbekanntem Fehler behafteten Zahlangabe, gibt der mittlere Fehler (m. F.). Er ist gleich der Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate der Abweichungen. Für unseren Fall ergibt sich aus dieser Definition für das Quadrat des m. F.

$$M^2(x) = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 (a-x) dx = \frac{a^2}{6}$$

und für den m. F. 9,8 Stunden, wenn wir wieder zu unserem ursprünglichen Problem zurückkehren.

Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich auf den Fehler, mit denen ein einzelnes Intervall behaftet ist. Fließ betrachtet nun aber nicht bloß einzelne Intervalle, sondern auch Summen von solchen. Wir müssen daher noch untersuchen, wie sich die Fehler bei einer solchen Summierung verhalten.

Wir haben wieder dieselben Fragen zu beantworten wie oben unter 1—3. Zuerst wollen wir berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß bei einer Summe von n Intervallen das erste Intervall einen Fehler von x_1 , das zweite einen solchen von x_2 - - -, das n . einen solchen von x_n Einheiten aufweise.

Da die Fehler voneinander unabhängig sind, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten, die den einzelnen Fehlern zukommen. Diese wiederum sind, wie wir gesehen, nur von der absoluten Größe der betreffenden Fehler abhängig. Bezeichnen wir wie üblich den absoluten Betrag einer Größe x durch das Symbol $|x|$, so finden wir für die gesuchte Elementarwahrscheinlichkeit

$$dw = \frac{1}{a^{2n}} (a - |x_1|) (a - |x_2|) \dots (a - |x_n|) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Gesamtfehler unterhalb eines bestimmten Wertes bleibe, resp. einen bestimmten Wert überschreite, ergibt sich als n -faches Integral, das über den in Frage kommenden Bereich auszudehnen ist.

Der allgemeine Fall für beliebiges n dürfte infolge der komplizierten Form des Integrationsgebietes nicht gerade sehr ein-

* W ist gleich dem Verhältnis der Fläche der beiden Dreiecke, die durch die ausgezogenen Geraden von dem Quadrate abgeschnitten werden zur Fläche des ganzen Quadrates.

fach sein. Für Werte von n größer als 3 versagt übrigens die direkte geometrische Anschauung. Ich begnüge mich, den Wert für $n = 2$ anzugeben. Man findet für die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler bei einer Summe aus 2 Intervallen einen halben Tag nicht überschreite

$$w \sim 1/2$$

Für beliebiges n erhält man auf Grund einer allerdings ziemlich rohen Schätzung:

$$w_n \sim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Da wir aber im m. F. eine Größe haben, die uns einen allgemeinen Überblick über die Zuverlässigkeit eines numerischen Wertes gibt, der mit einem zufälligen Fehler behaftet ist, wollen wir noch den m. F. berechnen. Es ist der m. F. einer Summe aus n Summanden, deren jedem der gleiche m. F. zukommt, gleich dem \sqrt{n} -fachen des m. F. eines einzelnen Summanden. Da der m. F. eines einzelnen Intervalles 9,8 Stunden beträgt, ist der m. F. für eine Summe aus 9 Intervallen, wie sie in dem Beispiel der Familie A. v. Humboldts vorkommt, 29,4 Stunden. Kein vorsichtiger Mathematiker wird einen Wert, dessen m. F. 29,4 Stunden ist, als auf ± 12 Stunden genau bestimmt ansehen, wenn er dafür keine positiven Garantien hat. Damit ist auch dieser Beweis von Fließ als das erkannt, was er im Grunde ist: eine mathematische und biologische Spielerei.

4. Einige Bemerkungen über Kettenbrüche.

An verschiedenen Stellen habe ich die Entwicklung einer gegebenen Größe in einen Kettenbruch zur einfachen genäherten Darstellung dieser Größe benützt. Wer mit den Elementen der Theorie der Kettenbrüche vertraut ist, wird das Vorgehen ohne weiteres verstehen. Für diejenigen Leser, die mit dieser Theorie nicht vertraut sind, will ich einige diesbezügliche Bemerkungen machen, wobei ich im Interesse größtmöglicher Anschaulichkeit eine von der üblichen etwas abweichende Darstellung bringen will, die selbstverständlich keinen Anspruch auf Strenge macht.

Nehmen wir an, wir haben einen (echten) Bruch n/m , wo n und m große Zahlen sind, oder auch irgend eine irrationale Zahl x , die wir uns der Einfachheit halber als Dezimalbruch geschrieben denken, der nach einer bestimmten Stellenzahl abgebrochen wird.

Wir stellen uns die Aufgabe, eine Reihe von Zahlen $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ zu finden, die sich dem gegebenen Bruche immer mehr

nähern, d. h. den Bruch durch eine bestimmte Zahlenreihe zu approximieren. Diese Aufgabe ist völlig unbestimmt: wir können unendlich viele Zahlenfolgen mit der gewünschten Eigenschaft aufstellen, und jede kann eine ganz beliebige Zahl von Gliedern haben.

Wir können uns aber fragen, ob es nicht eine oder eventuell mehrere, ausgezeichnete Folgen gibt, die besonders wertvolle Eigenschaften haben, und insbesondere, ob es nicht eine Folge gibt, die für gewisse Zwecke als die beste, gewissermaßen als eine „natürliche“ betrachtet werden darf, wobei zu bemerken ist, daß der Ausdruck „natürlich“ in der Mathematik nur als Redensart aufgefaßt werden darf.

Eine solche ausgezeichnete Folge gibt es nun in der Tat: es sind die sogenannten Näherungswerte des Kettenbruches, der die betreffende Größe darstellt. Diese Werte sind Brüche, deren Zähler und Nenner teilerfremd sind und die abwechselnd größer und kleiner als die gegebene Größe sind. Dabei wird das Intervall, in das der Wert so eingeschlossen wird, immer kleiner. Handelt es sich um eine rationale Zahl, so bricht der Kettenbruch nach einer endlichen Anzahl von Gliedern ab, und der letzte Näherungswert ist gleich dem Werte der gesuchten Größe. Handelt es sich um eine Irrationalzahl, so geht der Kettenbruch ins Unendliche, und es hat keinen Sinn zu sagen, daß man den Wert der betreffenden Größe genau angeben könne. Man kann aber in der Reihe der Näherungswerte einen Bruch finden, der von dem Wert der irrationalen Größe um weniger als eine beliebig kleine Größe abweicht, d. h. ihn so genau darstellt als man wünscht.

Die Näherungswerte konvergieren sehr rasch gegen den Wert des Kettenbruches und stellen diesen Wert mit den kleinstmöglichen Zahlen am besten dar. Stellt irgend ein Bruch den Wert des Kettenbruches genauer dar als ein bestimmter Näherungswert, so sind Zähler und Nenner größer als diejenigen des folgenden Näherungswertes.

Mit wie großer Genauigkeit eine Zahl schon durch ganz kleine Zahlen dargestellt werden kann, möge der Wert $355/113$ für π zeigen. Dieser Bruch, der schon Adrian Metius bekannt war, stellt den Wert von π auf 6 Stellen genau dar, also so genau wie der Bruch $3141592/10^6$.

Diese Eigenschaft der Kettenbrüche, unübersichtliche Verhältnisse großer Zahlen mit großer Annäherung durch kleine Zahlen darzustellen, hat auf den verschiedensten Gebieten Anwendung

gefunden. So ist es z. B. gewiß kein Zufall, daß die besten Ausdrücke für π in kleinen Zahlen: 22/7 (Archimedes), 333/106 (Inder), 355/113 gerade die aufeinanderfolgenden Näherungswerte des π darstellenden Kettenbruches sind.

In der Astronomie ergibt sich der berühmte chaldäische Cyclus für die Wiederkehr der Finsternisse (Saroscyclus) aus der Kettenbruchentwicklung des Verhältnisses der Längen des synodischen und des Drachenmonats. In ähnlicher Weise erhält man auch den berühmten Meton'schen Cyclus und andere astronomische Cyclen.

Selbstverständlich besteht kein zwingender Grund, einen der Näherungswerte des Kettenbruches zu wählen, der die betreffende statistische Größe darstellt. Es liegt aber, und das ist vielleicht auch dem mathematisch nicht Gebildeten jetzt klar, am wenigsten Willkür in diesem Vorgehen. Sucht man irgend einen andern Wert aus, so muß man einen plausibeln Grund dafür haben, der natürlich nicht darin gesehen werden kann, daß man eine „schöne“ Darstellung durch die Zahlen 23 und 28 erhält. Nichts zeigt die methodische Naivität von Fließ deutlicher als dieser ständig wiederkehrende Circulus vitiosus.

Diese ganze Methode hat übrigens nur dann einen Sinn, wenn man mit einem gewissen Recht annehmen kann, daß eine gegebene Zahl tatsächlich als Verhältnis zweier kleiner Zahlen aufgefaßt werden könne. Das dürfte aber für die Zahlen aus der Bevölkerungsstatistik mit der allergrößten Wahrscheinlichkeit – man kann wohl ruhig sagen „sicher“ – nicht zutreffen. Selbst das Geschlechtsverhältnis der Neugeborenen ist keine „einfache“ Größe. Was uns interessieren würde, wäre das Verhältnis von Knaben- und Mädchenembryonen oder sogar, wenn die Ansicht der modernen Vererbungstheorie richtig ist, der „Anlagen“ zu Knaben, resp. Mädchen, wie wir uns vorsichtig ausdrücken wollen. Nach der Vererbungstheorie müßten an sich gleich viel Knaben- und Mädchenembryonen entstehen, falls keine Störungen einträten. Das ist indes nicht der Fall. Das Übergewicht der Knaben- über die Mädchenembryonen ist, wenn auch nicht der Größe nach, so doch im Prinzip, absolut sichergestellt. Je jünger die Embryonen sind, um so mehr überwiegen die Knabenembryonen. Im Laufe der Entwicklung verschiebt sich das Verhältnis zugunsten der Mädchen, da unter den Totgeburten die Knaben ganz bedeutend überwiegen.

Schon diese wenigen Bemerkungen zeigen, wie kompliziert die Verhältnisse sind. Will man versuchen, aus dem Verhältnis

von Knaben- und Mädchengeburt auf die dahinterliegenden naturgesetzlichen Grundlagen zu schließen, so wird man äußerst behutsam vorgehen müssen und wird schon den ersten Näherungswert 16/15 als unsicher betrachten, um so mehr, als der erste Teilnenner ziemlich groß ist (15). Man würde die Vermutung aussprechen, daß die Wahrscheinlichkeit a priori für die Entstehung eines Knaben oder eines Mädchens dieselbe ist, daß aber durch nicht unbedeutliche Störungen dieses „reine“ Verhältnis getrübt wird. Aber diese Ansicht kann wie gesagt nur als Vermutung gelten. Sie ist allerdings wahrscheinlicher als die Annahme, die Wahrscheinlichkeit a priori eines Knabenembryos sei merklich von $\frac{1}{2}$ verschieden. Da auch die Vererbungslehre von verschiedenen Gesichtspunkten aus zu demselben Schluß kommt, darf man wohl der erwähnten Vermutung eine gewisse Berechtigung zusprechen. Aber ja nicht etwa aus rein mathematischen Gründen.

Der kritische Leser wird bemerkt haben, wie vorsichtig, um nicht zu sagen unbestimmt, ich mich ausgedrückt habe. Wer die modernen Theorien über die Entstehung des Geschlechtes kennt, weiß woher das kommt. Es ist tatsächlich nicht möglich, sich bestimmt auszudrücken, ohne eine bestimmte Vorstellung über die Entstehung des Geschlechtes zu haben, und diese Vorstellung geht über das rein Erfahrungsmäßige hinaus und kann sich nur an eine bestimmte, zurzeit noch mehr oder weniger hypothetische Vorstellung anschließen.

Daß man bei den Totgeburten, resp. den von der Statistik gegebenen Zahlen die Idee einer zugrundeliegenden zahlenmäßigen Gesetzmäßigkeit nicht voraussetzen kann, dürfte nach dem, was ich darüber im 2. Kapitel geschrieben habe, klar sein. Es hat deshalb auch gar keinen Sinn, irgend eine dieser Zahlen so behandeln zu wollen, wie es hier für das Geschlechtsverhältnis der Neugeborenen geschehen ist; es sei denn, um über alle Zweifel zu beweisen, daß man hinter jeder Zahl irgend eine versteckte Gesetzmäßigkeit finden kann.

LITERATURVERZEICHNIS

1. Das Hauptwerk von W. Fließ:
Der Ablauf des Lebens. Grundlegung zur exakten Biologie. 1. Auflage 1906. Leipzig und Wien, Franz Deuticke. 2. Auflage 1923.
Die beiden Auflagen zitiert als I und II. Neben dem Hauptwerk hat Fließ noch einige kleinere Publikationen herausgegeben, die aber nichts wesentlich Neues enthalten und deshalb hier nicht zitiert werden.
Dasselbe gilt auch für die Publikationen einiger Anhänger von Fließ, wie z. B. Hans Schlieper, dessen Buch „Der Rhythmus des Lebendigen“ eine stark gekürzte Darstellung der Lehren von Fließ ist, wozu noch einige Beiträge des Verfassers kommen.
2. Eine Art mathematischer Theorie der Fließ'schen Periodenlehre bietet das Buch:
Grundzüge der Fließ'schen Periodenrechnung von Richard Pfennig. Leipzig und Wien, Franz Deuticke 1918.
3. Zur Orientierung über die bei Fließ vorkommenden statistischen Daten wurde verwendet:
Handbuch der medizinischen Statistik. Von Dr. Fr. Prinzing. Verlag von Gustav Fischer in Jena 1906.
4. Den mathematischen Ausführungen liegt vor allem zugrunde: Algebra mit Einschluß der elementaren Zahlentheorie von Dr. Otto Pund. Sammlung Schubert VI, Leipzig. G. J. Göschen 1899.
Ferner wurde noch, besonders für die Untersuchung betreffend Kongruenz, die „Höhere Algebra“ von H. Hasse, Sammlung Göschen Band 931 benützt.
5. Die Theorien von Noetling finden sich in dem Buche:
Die kosmischen Zahlen der Cheopspyramide. Von Dr. Fr. Nøtling. Stuttgart 1921, E. Schweizerbarth'sche Verlagsbuchhandlung.

DIE BÜCHER DES HIPPOKRATES-VERLAGS

„HIPPOKRATESBÜCHER FÜR ÄRZTE“

Herausgeber: PAUL FEDERN-WIEN / HEINRICH MENG-STUTT GART
KARL FAHRENKAMP-CANNSTATT

Band I

KARL FAHRENKAMP / DIE PSYCHOPHYSISCHEN WECHSELWIRKUNGEN BEI DEN HYPERTONIE-ERKRANKUNGEN

45 Blutdruckkurven. 142 S. Gr.-8°. 1926. Brosch. RM. 5.50. Ganzlein. RM. 8.—

Neuerdings ist eine ganz ausgezeichnete Arbeit von Fahrenkamp erschienen, die alle bei dem Hypertonieproblem in Betracht kommenden Fragen eingehend erörtert und den unweigerlichen Beweis dafür erbringt, daß psychische Einflüsse nicht nur vorübergehend, sondern auch dauernd von der größten Bedeutung für die Blutdruckkurve sind.

... ist ein erates und man darf sagen vorbildliches Beispiel moderner klinischer Arbeit, die berufen ist, unser Wissen um den Zusammenhang somatischer und psychischer Vorgänge aus dem Bereich der Vermutungen heraus auf eine sichere Basis zu stellen und zur Grundlage ärztlichen Handelns zu machen. Aus dem Buch spricht der erfahrene kritische Arzt, der sich mit großem Erfolg bemüht, die Grundlage seiner Tätigkeit in neuartiger Weise zu betrachten und zu erforschen. Jeder Arzt wird dieses Buch mit großem Nutzen lesen.

Klinische Wochenschrift.

Archiv für klinische Medizin.

Band II

OTTO LEESER / GRUNDLAGEN DER HEILKUNDE LEHRBUCH DER HOMÖOPATHIE

Neue Fassung. 160 Seiten. Gr.-8°. Broschiert RM. 5.50, Ganzleinen RM. 8.—

Zweifellos eine auch der wissenschaftlichen Medizin willkommen Einführung in die Homöopathie, eine geschickte Verteidigung ihrer Leitsätze und fesselnde Darstellung der heutigen Form des ursprünglichen Lehrgebäudes Hahnemanns durch einen hochgebildeten, schreibgewandten, auch medizinisch-naturwissenschaftlich vortrefflich geschulten und selbst für die Erkenntnistheorie der Biologie interessierten Autor.

Der Wert des Buches liegt vorzugsweise in seinem sachlichen Charakter, in der Verständlichkeit nicht nur von philosophisch-medizinischen, sondern auch gerade klinischen Gesichtspunkten aus, eben wegen der Behandlung des Themas in konzentrierter und vor allem wissenschaftlich begründeter Form. Jeder Studierende und Arzt mußte sich mit diesem Buch auseinandersetzen.

Fortschritte der Therapie.

Band III

ADOLF THEILHABER / DIE BEKÄMPFUNG DER KRANKHEITSDISPOSITION ALS HEILMETHODE

Dargestellt von einem Frauenarzt
429 Seiten mit 26 Abbildungen. Gr.-8°. Brosch. RM. 20.—, Leinen RM. 24.—

Die überwiegende Mehrzahl unserer Forscher und Ärzte hat sich lange Zeit hindurch um die Gründe der Verschiedenartigkeit der Reaktion der Organismen gegenüber den gleichen krankheitserregenden Einflüssen wenig bekümmert. In den letzten beiden Jahrzehnten hat sich dies einigermaßen geändert, das Interesse für die Lehre von der Konstitution wurde ziemlich groß, doch klaffen auch in dieser Lehre noch sehr beträchtliche Lücken. Noch weniger ausgebaut ist die Lehre von der Krankheitsdisposition. Verfasser bezeichnet die Konstitution als den weiteren Begriff: er umfaßt das gesamte Körpersubstrat in seiner jeweiligen Beschaffenheit und den Zustand und die Funktion aller seiner Bestandteile. Unter Disposition versteht er dagegen ausschließlich die Hemmung des Widerstandes der Gewebe gegenüber dem Einfluß von schädigenden Reizen.

In der ersten Hälfte des allgemeinen Teiles des Buches wird die Entstehung der Krankheitsdisposition im allgemeinen geschildert, in der zweiten eine große Reihe von Maßnahmen für die Verminderung und Beseitigung der Disposition. Der spezielle Teil des Buches behandelt die Disposition zur Entstehung von Veränderungen der Lage der weiblichen Genitalien, der Menstruationsstörungen, der Krebse, Myome, Sarkome, Eierstockgeschwülste; es folgt die Disposition zur chronischen Metritis, Oophoritis, Fluor usw. Den Schluß bildet die Schilderung der Disposition zu einer größeren Anzahl von Anomalien, die in der Praxis gewonnener Ratschläge für die Verminderung und Beseitigung der Krankheitsdisposition schließt sich auch hier den meisten Kapiteln an.

In diesem Werke wird zum ersten Male ausführlich gezeigt, daß die Disposition durch rechtzeitiges energisches Eingreifen beeinflußt und so die Entstehung vieler gefährlicher Krankheiten verhütet werden kann.

HIPPOKRATES-VERLAG / STUTT GART-LEIPZIG-ZÜRICH

HANS MUCH / HIPPOKRATES DER GROSSE

164 Seiten. Gr.-8°. 1926. In Leinen RM. 7.50, in Halbleder RM. 11.—

Hans Much gibt in diesen Blättern nicht etwa lediglich eine geschichtliche Darstellung, sondern diese erweitert sich zu einer grundsätzlichen Auseinandersetzung über das Wesen der Heilkunde vom modernsten Standpunkte aus. Die Problematik des ärztlichen Berufs wird scharf umrissen, und in diesem Zusammenhang erscheint die Heilkunde letzten Endes nicht als Wissenschaft, sondern als Kunst. Much trägt seine Anschauungen sehr temperamentvoll und in vollendeter Form vor. Eine starke Persönlichkeit mit hier viele Anregungen und neue Fragestellungen. Daher ist die Lektüre dieses Buches auch für den ein hoher Genuß, der gegen manche der vorgetragenen Ideen Einwände erheben möchte.

Rheinisch-Westfälische Zeitung, Essen.

Der Verfasser rührt an die Grundlagen der Heilkunde, und Hippokrates bzw. die hippokratischen Schriften geben ihm nur den Rahmen, dem Wesen und den Aufgaben der Medizin, den Grenzen der naturwissenschaftlichen Erkenntnis und den Problemen des Lebens nachzuspüren. Alles, was ein so gedankenreicher und dichterisch veranlagter Mann wie Much zu sagen hat, ist nicht nur schlechtweg interessant und anregend, sondern auch wirklich dazu angetan, unsere Erkenntnis zu fördern, so manches, was heute getrieben wird, mit kritischem Auge anzusehen.

Wiener klinische Wochenschrift.

PAUL DAHLKE / HEILKUNDE UND WELTANSCHAUUNG

212 Seiten. Gr.-8°. 1928. Broschiert RM. 7.—, in Buckram-Leinen RM. 10.—

INHALTSÜBERSICHT:

I. Historischer Teil: Bildung und Weltanschauung / Heilwissen als Erfahrung, Heilkunst als Erlebnis / Künstlerisch-unmittelbare Heilkunde: Sympathieheilung, Mesmerismus, Christian Science und Couéismus / Heilkunde als Erfahrungswissenschaft: Schulmedizin.

II. Theoretischer Teil: Was ist Wirklichkeit / Glauben und Wissenschaft / Ernährung als lebendige Einheit von Kraft und Stoff, als Tat-Sache / Das Ich / Das Begriffsvermögen im Ernährungsvorgang / Das Woher und Wohin / Die Wirklichkeitslehre des Buddhismus / Theorie und Praxis.

III. Praktischer Teil: Wie entsteht Krankheit, wie Selbstheilung? / Begriffs-, Gefälle- und Ernährungskrankheiten / Die Homöopathie / Hahnemann und Kant / Mißverständnisse Biers / Beweis durch Nutzen / Selbstbegrenzung der homöopathischen Heilkunde / Einwirkung auf die Anlage / Die Psychoanalyse / Biochemie / Strömungen in der heutigen Schulmedizin / Nahrungs- und Reizmittel / Diätetik / Schlaf und Geschlechtsverkehr / Kleidung / Hautreinigung / Atmung / Fasten.

EMIL SCHLEGEL / DIE KREBSKRANKHEIT IHRE NATUR UND IHRE HEILMITTEL

Neue Fassung. 294 S. Gr.-8°. 1927. Brosch. RM. 9.—, Ganzleinen RM. 12.—

AUS DEM INHALT:

Vorläufige Erfolgseindrücke / Wissenschaftliche Forschung über das Krebsproblem / Neuere Diätetik zur Krebsfrage / Die wissenschaftliche Haltung neuerer Krebschriften / Vorkrankheiten / Gesundheits- und Reinlichkeitswahn gegenüber Krebs / Krebsoperation / Gewalttätige Strahlentherapie, Aetzverfahren / Arzneiversuche / Annäherung der Auffassungen und Methoden an die Homöopathie / Überleitung zur homöopathischen Krebstherapie / Die homöopathischen Arzneien / Systematische Krebstherapie / Vereinigtes homöopathisches und isopathisches Verfahren / Die Krebskrankheit in der Volksmedizin.

Diese Richtlinien für das praktische Handeln werden durch den gewiß diskutablen Grundgedanken gestützt, daß Krebs keine ausschließlich lokale Erkrankung sei, sondern eine bestimmte Veranlagung zur Voraussetzung habe, an der die Diät und interne Therapie angreifen könne.

Ärztliches Vereinsblatt für Deutschland.

BERNHARD ASCHNER / DIE KRISE DER MEDIZIN KONSTITUTIONSTHERAPIE ALS AUSWEG

562 Seiten, Gr.-8°. 1928. Preis brosch. RM. 18.—, geb. RM. 22.—

Zum Unterschied von den mehr denkerisch gerichteten Forschern, die bisher Stellung nahmen zu der Krise in der Heilkunde, hält sich Aschner an das Gegebene: den Kranken und sein Blut. Das Blut ist ihm Träger der Konstitution, darum Ort des Ansatzens der Therapie. Er holt die Erfahrungen des alten vorvirchowschen Heilschatzes (Humoralpathologie, Säftelehre) hervor, vervollkommenet und bereichert ihn durch die modernen Verfahren und kommt zu glänzenden, ermutigenden Ergebnissen und darüber hinaus zu einer Heilkunst, deren Größe und Großzügigkeit alles ant und vieles hinter sich läßt, was sich bisher einzeln mühte.

HIPPOKRATES-VERLAG / STUTT GART-LEIPZIG-ZÜRICH

HIPPOKRATES
ZEITSCHRIFT FÜR EINHEITSBESTREBUNGEN DER
GEGENWARTSMEDIZIN

Zweimonatlich ein 5-6 Bogen starkes Heft. Einzelpr. RM. 7.-, Halbjährl. RM. 18.-

Der Name Hippokrates verpflichtet, die geschiedenen Strömungen in der heutigen Medizin in einer wissenschaftlich begründeten und zur Kunst entwickelten Heilkunde wieder zu vereinen.

An der Schriftleitung nehmen teil: Privatdozent Dr. Bernhard Aschner, Wien / Dr. Eugen Bircher, Aarau / Prof. Dr. Adolf Buschke, Berlin / Prof. Dr. Adolf Friedländer, Freiburg i. Br. / Dr. Walter Gerlach, Berlin / Dr. Hans Graaz, Berlin / Prof. Dr. Louis R. Grote, Weißer Hirsch / Dr. Max Hirsch, Berlin / Prof. Dr. Georg Honigmann, Gießen / Prof. Dr. Hueppe, Dresden-Loschwitz / Prof. Dr. Diedrich Kulenkampf, Zwickau / Dr. Karl Landauer, Frankfurt a. M. / Dr. Erich Langer, Berlin / Dr. Otto Leiser, Frankfurt a. M. / Dr. Erwin Liek, Danzig / Privatdozent Dr. Georg Lutz, Stuttgart / Dr. Heinrich Meng, Stuttgart / Prof. Dr. Miroslav Mikulicic, Zagreb / Prof. Dr. Hans Much, Hamburg / Privatdozent Dr. Walter Riese, Frankfurt a. M. / Prof. Dr. Paul Schilder, Wien / Prof. Dr. H. E. Sigerist, Leipzig / Prof. Dr. Erich Stern, Gießen / Dr. Rudolf Tischner, München / Dr. Friedrich Wolter, Hamburg
Leitung: Prof. Dr. Georg Honigmann, Gießen.

DAS ÄRZTLICHE VOLKSBUCH

Herausgegeben von DR. HEINRICH MENG, Stuttgart, unter Mitwirkung von Dr. K. A. Fießler, Berlin, und Dr. Paul Federn, Wien, und unter Mitarbeit von 45 namhaften Vertretern der Heilkunde und der Naturwissenschaft. Zweite, erweiterte Auflage. 3 Bände in Leinen RM. 48.- od. 20 Lieferungen zu je RM. 2.- (Einbanddecken kostenlos). Prospekte u. Probehefte kostenlos v. Verlag

... Es gibt wohl deutschem Fleiß und deutscher Tatkraft ein glänzendes Zeugnis, wenn ein Werk mit so gediegenem Inhalt und in so vornehmer Ausstattung mit künstlerisch ausgeführten Abbildungen auf den Büchermarkt gebracht werden konnte. ... Wiener klinische Wochenschrift.

Man hat vornehmlich drei Werke aufgezählt, durch die das deutsche Volk sich selbst ein Denkmal gesetzt hat: das Konversationslexikon, den Sprachunterricht von Toussaint-Langenscheidt und Baedekers Reisehandbücher. Diesen drei Werken stellt sich „Das Ärztliche Volksbuch“ ebenbürtig an die Seite.

Prager Tagblatt.

DAS PSYCHOANALYTISCHE VOLKSBUCH

Herausgegeben von DR. PAUL FEDERN, Wien u. DR. HEINRICH MENG, Stuttgart, unter Mitarbeit von 15 berufenen Ärzten und Pädagogen
550 Seiten, 11 Bilder. 8°. Broschiert RM. 7.50, Ganzleinen RM. 9.50

... Mancher Arzt täte gut daran, die 40 Aufsätze zu lesen und aus diesem im besten Sinne populären Buch die nötige Aufklärung über die Freudsche Gedankenwelt zu gewinnen, deren Erfassung ihm durch Vorurteil und Schwierigkeit der Terminologie bisher verwehrt war. ... Ärztliches Vereinsblatt.

ISTVAN HOLLOS / HINTER DER GELBEN MAUER
VON DER BEFREIUNG DES IRREN

170 Seiten. 8°. 1928. Broschiert RM. 3.50, Ganzleinen RM. 5.50

An alle, die den Menschen in seelischer Not helfen wollen, wendet sich dieses Buch. Die großlinigen Schilderungen sind wohl für den Laien bestimmt, doch wird vor allem auch der Psychiater hinter der „Literatur“ den klassischen Ernst neuartiger wissenschaftlicher Gedanken auffinden. Gerade in der tausendfachen Zersplitterung der psychiatrischen Kleinarbeit werden diese zusammenfassenden Gedanken, die auf durchdringenden Beobachtungen fußen, weite Ausblicke und tiefe Einblicke eröffnen. Dem Anstaltsarzt zeigt das Buch einen Spiegel. Seine ganze Tätigkeit wird unter die Lupe des einzig wirklich Befugten, des Kranken, gestellt. In dem Kapitel: „Wie wir es sehen und wie sie es sehen“ erschließt sich ein Stück Arbeit menschlicher und wissenschaftlicher Identifizierung, die die tiefsten Regungen des Kranken und seine Beziehungen zum Arzt und zum Irrenhause verrät. Auch jene Regungen, die im Irrenarzte selbst verborgen sind und ihn zum typischen Irrenarzte machen, werden enthüllt.

In der Therapie wird ein neuer Gedanke eingeführt, der Gedanke der analytischen Familienpflege. Dieses Programm bedeutet eine Absage. Hollós widmet daher sein Buch der Schulpsychiatrie in ehrlicher Gegnerschaft!

HIPPOKRATES-VERLAG / STUTTGART-LEIPZIG-ZÜRICH